



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



## PRIMER EXAMEN PARCIAL CÁLCULO I

Valor: 65 puntos.

Tiempo máximo: 3 horas.

Sábado 5 de abril de 2014

### *INSTRUCCIONES GENERALES*

- Antes de contestar lea cuidadosamente las instrucciones y los enunciados de las preguntas.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble azul o negra para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, éste **no se calificará**.
- **Este examen deberá ser resuelto en el cuaderno de examen. Escriba las respuestas de la parte de selección y de la parte de análisis de gráfica en su cuaderno de examen con la numeración correspondiente. En la parte de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada ítem.
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.

### **I PARTE. Selección única. Valor: 5 puntos (un punto cada respuesta correcta).**

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios. Para cada uno de los enunciados se ofrecen cuatro opciones de respuesta de las cuales solamente una es correcta. Seleccione la respuesta y escriba en el cuaderno de examen el número de ítem y la letra correspondiente a la respuesta correcta.

1. Analice las siguientes afirmaciones referidas a una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- I. Si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  entonces  $f(2) = 5$
- II. Si  $f$  es estrictamente creciente entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

De ellas, con certeza son verdaderas

- a. Solamente II  
b. Solamente I  
c. Ninguna  
d. Ambas

2. Analice las siguientes afirmaciones referidas a una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- I. Si  $y = 2$  es asíntota horizontal de la gráfica de  $f$  entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .
- II. Si  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  entonces  $x = 2$  es asíntota vertical de la gráfica de  $f$ .

De ellas, con certeza son verdaderas

- a. Solamente II
- b. Solamente I
- c. Ninguna
- d. Ambas

3. Considere dos funciones  $f$  y  $g$  tales que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -4$  y analice las siguientes afirmaciones:

- I.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = -\infty$
- II.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

De ellas, con certeza son verdaderas

- a. Solamente II
- b. Solamente I
- c. Ninguna
- d. Ambas

4. El valor de  $a$  para el cual  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - a}{8 + x^3}$  existe corresponde a

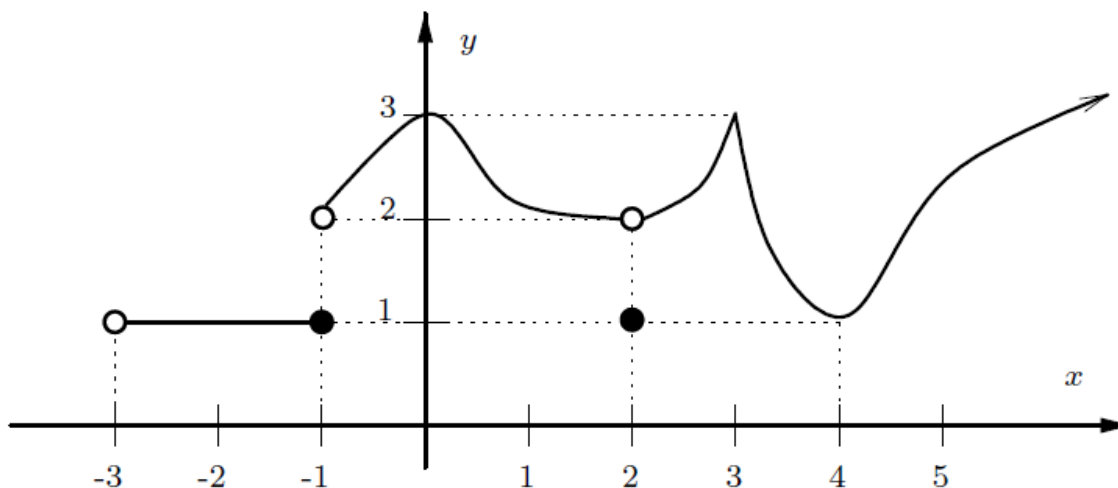
- a. 0
- b. 4
- c. 8
- d. -8

5. Dada  $f$  una función definida en su máximo dominio tal que  $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x > 0 \\ x^2 - k^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ , entonces los valores de  $k$  para los cuales  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe corresponden a

- a. únicamente 2
- b. únicamente 4
- c. 2 y -2
- d. 4 y -4

**II PARTE: Análisis de gráfica. Valor: 10 puntos (1 punto cada acierto).**

Instrucciones: Considere la gráfica de la función  $f$  que se muestra a continuación. Escriba en el cuaderno de examen el número de ítem y la respuesta que completa correctamente cada afirmación en los ítems del 1 al 5. En los ítems del 6 al 10 calcule los límites si existen, de lo contrario justifique su respuesta.



1. Un valor de  $x$  para el cual la función presenta una discontinuidad no evitable corresponde a \_\_\_\_\_.
2. Un valor de  $x$  para el cual la función presenta una discontinuidad evitable corresponde a \_\_\_\_\_.
3. Un valor de  $x$  para el cual la función es continua pero no derivable corresponde a \_\_\_\_\_.
4. Un valor  $a > 0$  para el cual  $f'(a) = 0$  corresponde a \_\_\_\_\_.

5. Un valor  $a$  para el cual  $f'(a) < 0$  corresponde a \_\_\_\_\_.

Calcule, si existen, los siguientes límites :

6.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

7.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

9.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**III PARTE: Desarrollo Valor: 50 puntos.**

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios. Debe indicar todo el procedimiento que le permitió obtener la respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada.

1. Calcule, si existen, los siguientes límites:

a. (4 puntos)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{16 + 2x^3}{x^3 - 3x + 2}$

b. (6 puntos)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{-\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{4 - \frac{x}{4}}$

c. (4 puntos)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{-4x + \pi}$

d. (6 puntos)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x - 6|}{x^3 - 2x^2}$

2. (7 puntos) Analice la continuidad de la función  $h$  cuyo criterio es  $h(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ . Determine el dominio, intervalos donde es continua y clasifique las discontinuidades en evitables o no evitables.

3. En cada uno de los siguientes casos determine  $\frac{dy}{dx}$ . No es necesario simplificar.

a. (7 puntos)  $y = \frac{e^{3x^2+x} \cot(-x)}{1+\sqrt{x}}$

b. (5 puntos)  $y = \left[ \sqrt[4]{x} - (\sqrt{2} + \cos^4 x)^5 \right]^{-1}$

4. (5 puntos) Determine la ecuación de la recta normal a la curva de  $y = 1 + 3x \cos(4x)$  en el punto de coordenadas (0,1).

5. (6 puntos) Considere la función  $f$  definida en su máximo dominio tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-1}{5x+3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{2x^2+x} - \sqrt{x+x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Determine, si existen, las asíntotas horizontales de la curva  $y = f(x)$ .



**PRIMER EXAMEN PARCIAL  
CÁLCULO I  
SOLUCIÓN**

Valor: 65 puntos.

Tiempo máximo: 3 horas.

Sábado 5 de abril de 2014

***INSTRUCCIONES GENERALES***

- Antes de contestar lea cuidadosamente las instrucciones y los enunciados de las preguntas.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble azul o negra para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado, éste no se calificará.**
- **Este examen deberá ser resuelto en el cuaderno de examen. Escriba las respuestas de la parte de selección y de la parte de análisis de gráfica en su cuaderno de examen con la numeración correspondiente. En la parte de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada ítem.
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.

**I PARTE. Selección única.**

**Valor: 5 puntos.**

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios. Para cada uno de los enunciados se ofrecen cuatro opciones de respuesta de las cuales solamente una es correcta. Seleccione la respuesta y escriba en el cuaderno de examen el número de ítem y la letra correspondiente a la respuesta correcta.

1. Analice las siguientes afirmaciones referidas a una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- I. Si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  entonces  $f(2) = 5$
- II. Si  $f$  es estrictamente creciente entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

De ellas, son verdaderas

- a. Solamente II
- b. Solamente I
- c. Ninguna
- d. Ambas

2. Analice las siguientes afirmaciones referidas a una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- I. Si  $y = 2$  es asíntota horizontal de la gráfica de  $f$  entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .
- II. Si  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  entonces  $x = 2$  es asíntota vertical de la gráfica de  $f$ .

De ellas, son verdaderas

- a. Solamente II
- b. Solamente I
- c. Ninguna
- d. Ambas

3. Considere dos funciones  $f$  y  $g$  tales que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -4$  y analice las siguientes afirmaciones:

- I.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = -\infty$
- II.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

De ellas, son verdaderas

- a. Solamente II
- b. Solamente I
- c. Ninguna
- d. Ambas

4. El valor de  $a$  para el cual  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - a}{8 + x^3}$  existe corresponde a

- a. 0
- b. 4
- c. 8
- d. -8

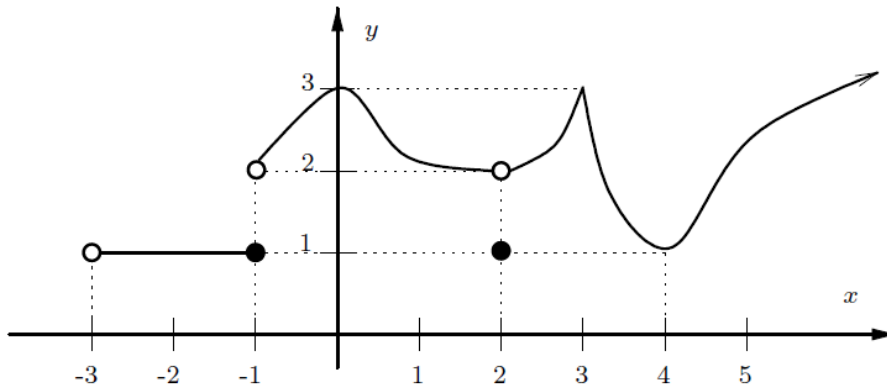
5. Si  $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x > 0 \\ x^2 - k^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ , los valores de  $k$  para los cuales  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe, corresponden a

- a. únicamente 2
- b. únicamente 4
- c. 2 y -2
- d. 4 y -4

**II PARTE: Análisis de gráfica.**

**Valor: 10 puntos.**

**Instrucciones:** Considere la gráfica de la función  $f$  que se muestra a continuación e indique lo que se le solicita. Escriba en el cuaderno de examen el número de ítem y la respuesta correspondiente.



1. Un valor de  $x$  para el cual la función presenta una discontinuidad no evitable corresponde a   -1
2. Un valor de  $x$  para el cual la función presenta una discontinuidad evitable corresponde a   2
3. Un valor de  $x$  para el cual la función es continua pero no derivable corresponde a   3
4. Un valor  $a > 0$  para el cual  $f'(a) = 0$  corresponde a   4
5. Un valor  $a$  para el cual  $f'(a) < 0$  corresponde a   cualquier valor en  $]0,2[ \cup ]3,4[$



Calcule, si existen, los siguientes límites :

6.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  2

7.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  no existe

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  3

9.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  2

10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   $+\infty$

**III PARTE: Desarrollo.**

**Valor: 50 puntos.**

Instrucciones:

1. Calcule, si existen, los siguientes límites:

a. (4 puntos)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{16 + 2x^3}{x^3 - 3x + 2}$

**Solución**

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{16 + 2x^3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(2 + x)(4 - 2x + x^2)}{(2 + x)(1 - 2x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(4 - 2x + x^2)}{(1 - 2x + x^2)} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

b. (6 puntos)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{-\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{4 - \frac{x}{4}}$

**Solución**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 16} \frac{-\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{4 - \frac{x}{4}} &= \lim_{x \rightarrow 16} \left[ \frac{(2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x})}{\frac{16-x}{4}(\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x})} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 16} \left[ \frac{4(4\sqrt{x} - x)(4\sqrt{x} + x)}{(16-x)(\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x})(4\sqrt{x} + x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{4(16x - x^2)}{(16-x)(\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x})(4\sqrt{x} + x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{4x}{(16-x)(\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x})(4\sqrt{x} + x)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{4x}{(\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x})(4\sqrt{x} + x)} \\
&= \frac{64}{8 \cdot 32} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

c. (4 puntos)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{-4x + \pi}$

### Solución

Sea  $u = x - \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{-4x + \pi} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{-4\left(u + \frac{\pi}{4}\right) + \pi} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{-4u} = \frac{-1}{4} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{u} = 0$$

d. (6 puntos)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-6|}{x^3 - 2x^2}$

### Solución

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-6|}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3|x-2|}{(x-2)x^2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-6|}{x^3 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-6|}{(x^2 + 2x - 1)(x-2)}$$

Se deben calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3|x-2|}{(x-2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)}{(x-2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3|x-2|}{(x-2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3(x-2)}{(x-2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3}{x^2} = -\frac{3}{4}$$

Por lo tanto,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-6|}{x^3 - 2x^2}$  no existe.

2. (7 puntos) Analice la continuidad de la función  $h$  cuyo criterio es  $h(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ . Determine el dominio, intervalos donde es continua y clasifique las discontinuidades en evitables o no evitables.

**Solución**

Note que  $h(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1}$

Como  $h$  es una función racional de dominio:  $\mathbb{R} - \{3, -1\}$  entonces es continua en los siguientes intervalos:  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, 3[$ ,  $]3, +\infty[$ .

Clasificación de las discontinuidades en  $x = -1$  y en  $x = 3$ :

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+3}{x+1} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+3}{x+1} = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{3}{2}$  por lo tanto en  $x = -1$  hay una discontinuidad no evitable y en  $x = 3$  hay una discontinuidad evitable.

3. En cada uno de los siguientes casos determine  $\frac{dy}{dx}$ . No es necesario simplificar.

a. (7 puntos)  $y = \frac{e^{3x^2+x} \cot(-x)}{1+\sqrt{x}}$

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[e^{3x^2+x}(6x+1)\cot(-x) + e^{3x^2+x}\csc^2(-x)](1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{3x^2+x}\cot(-x)}{(1+\sqrt{x})^2}$$

b. (5 puntos)  $y = [\sqrt[4]{x} - (\sqrt{2} + \cos^4 x)^5]^{-1}$

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = -[\sqrt[4]{x} - (\sqrt{2} + \cos^4 x)^5]^{-2} \left[ \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 5(\sqrt{2} + \cos^4 x)^4 (4\cos^3 x)(-\text{sen} x) \right]$$

4. (5 puntos) Determine la ecuación de la recta normal a la curva de  $y = 1 + 3x \cos(4x)$  en el punto de coordenadas  $(0,1)$ .

**Solución:**

Como  $y = 1 + 3x \cos(4x) \rightarrow y' = 3\cos(4x) - 12x \text{sen}(4x)$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (0,1) es:  $m = y'(0) = 3 - 0 = 3$

La pendiente de la recta normal a la curva en el punto (0,1) es:  $m_N = \frac{-1}{3}$

La ecuación de la recta normal a la curva en el punto (0,1) es:  $y = \frac{-1}{3}x + 1$

6. (6 puntos) Considere la función  $f$  definida en su máximo dominio tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 1}{5x + 3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{x + x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} . \text{ Determine, si existen, las asíntotas horizontales}$$

de la curva  $y = f(x)$ .

**Solución:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{5x + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x} + 3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{x + x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - (x + x^2)}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x + x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \left( \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\left( \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = +\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única recta horizontal que es asíntota de la gráfica de  $y = f(x)$  es la de ecuación  $y = \frac{2}{3}$