Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CORRECCIÓN PRIMER EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO I

1. Calcule cada uno de los siguientes límites:

1.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{16+x}}{5-\sqrt{25+x}}$ al evaluar se presenta una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$.

(5 puntos)

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-\sqrt{16+x}}{5-\sqrt{25+x}}\cdot\frac{4+\sqrt{16+x}}{5+\sqrt{25+x}}\cdot\frac{5+\sqrt{25+x}}{4+\sqrt{16+x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{16-16-x}{25-25-x}\cdot\frac{5+\sqrt{25+x}}{4+\sqrt{16+x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x}{-x}\cdot\frac{5+\sqrt{25+x}}{4+\sqrt{16+x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5+\sqrt{25+x}}{4+\sqrt{16+x}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

1.2 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$ al evaluar se presenta una forma indeterminada del tipo $\infty-\infty$

(5 puntos)

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+x}-x}=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-x}=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{-x\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{-x\left[\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+1\right]}=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-\left[\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+1\right]}=\frac{1}{-2}=\frac{-1}{2}$$

1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$ al evaluar se presenta una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$.

(6 puntos)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

Sea $y^6=\cos x$, entonces $y^3=\sqrt{\cos x}$ y $y^2=\sqrt[3]{\cos x}$.Si $x\to 0\Rightarrow y\to 1.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{1\text{-}\cos^2 x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-y^2}{1-y^{12}}=$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2\left(y-1\right)}{\left(1-y^6\right)\left(1+y^6\right)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2\left(y-1\right)}{\left(1-y^3\right)\left(1+y^3\right)\left(1+y^6\right)}=$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2\left(y-1\right)}{\left(1-y\right)\left(1+y+y^2\right)\left(1+y^3\right)\left(1+y^6\right)}=$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{-y^2\left(1-y\right)}{\left(1-y\right)\left(1+y+y^2\right)\left(1+y^3\right)\left(1+y^6\right)}=$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{-y^2}{\left(1+y+y^2\right)\left(1+y^3\right)\left(1+y^6\right)}=$$

$$\frac{-1}{3\cdot 2\cdot 2}=\frac{-1}{12}$$

1.4 $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-x^2+1}{2x^4-3x^3-6x^2+5x+6}$ al evaluar se presenta una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$.

(4 puntos)

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{\left(1-x\right)\left(1+x\right)}{\left(x+1\right)\left(2x^3-5x^2-x+6\right)}=$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{\overset{-2}{\left(1-x\right)}}{\underset{0^-}{\left(x+1\right)}\underset{15}{\left(2x^2-7x+6\right)}}=-\infty$$

1.5 Si $\left|g(x)-3\right| < 5(x+2)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^-$. Determine $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{g(x)}{4}$ (5 puntos)

$$-5(x+2)^2 < g(x)-3 < 5(x+2)^2 \Rightarrow$$

$$-5(x+2)^2+3 < g(x) < 5(x+2)^2+3 \Rightarrow$$

3 cuando $x \to -2$ $\qquad$ 3 cuando $x \to -2$

Por el teorema de intercalación se tiene que $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{g(x)}{4} = \dfrac{3}{4}$.

2. Considere la función f cuyo criterio está dado por: (10 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+m}{x+n} & \text{si} \quad x \leq -2 \\ -nx-m & \text{si} \quad -2 < x \leq 2 \\ x^2-7x-5m & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Determine los valores de m y n de tal forma que f sea continua en $\mathbb{R}$.

- En $\left]-\infty,-2\right]$, como $\dfrac{x+m}{x+n}$ es una fracción racional, se tiene que f es continua en $\left]-\infty,-2\right]-\{-n\}$. Por lo tanto, sería continua en $\left]-\infty,-2\right]$ siempre y cuando $n \notin \left]-\infty,-2\right]$, para cualquier valor de m.
- En $\left]-2,2\right]$ y $\left]2,+\infty\right[$ f es continua sin importar los valores de m y n pues $-nx-m$ y $x^2-7x-5m$ son polinomios.

Análisis de la continuidad en $x=-2$.

- Existencia del límite:

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x+m}{x+n} = \dfrac{-2+m}{-2+n}$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} \left(-nx-m\right) = 2n-m$, para que el límite de la función cuando x tiende a -2 exista, debe suceder que $\dfrac{-2+m}{-2+n} = 2n-m$

(ecuación 1).

- Además $f(-2) = \dfrac{-2+m}{-2+n}$

Continuidad en $x = 2$.

- Existencia del límite:

Como $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-nx-m\right) = -2n-m$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2 - 7x - 5m = 4 - 14 - 5m$, entonces para que el límite de la función cuando x tiende a 2 exista debe cumplirse que: $-2n - m = 4 - 14 - 5m \Rightarrow -2n = -10 - 4m \Rightarrow n = 5 + 2m.$ (ecuación 2).

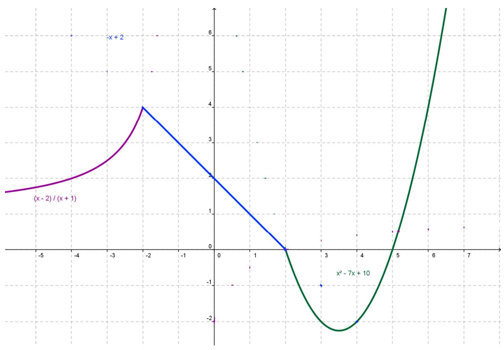
- Además $f(2) = -2n - m$

Ahora, al sustituir la ecuación 2 en la ecuación 1 para hallar el valor o valores de m se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{-2+m}{-2+5+2m} = 2\left(5+2m\right)-m\\
&\Rightarrow \frac{-2+m}{3+2m} = 10+4m-m\\
&\Rightarrow \frac{-2+m}{3+2m} = 10+3m\\
&\Rightarrow -2+m = \left(3+2m\right)\left(10+3m\right)\\
&\Rightarrow -2+m = 30+20m+9m+6m^2\\
&\Rightarrow 0 = 32+28m+6m^2\\
&\Rightarrow m_1 = 2 \quad \vee \quad m_2 = \frac{-8}{3}.
\end{aligned}$$

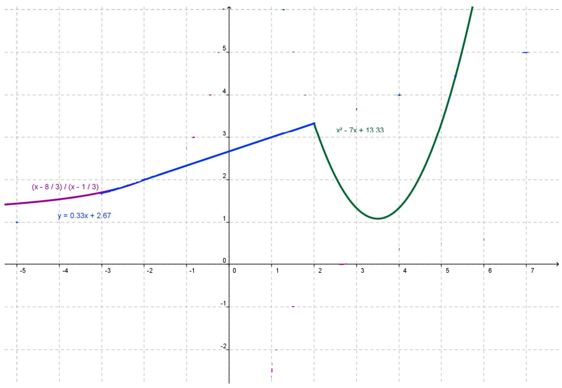
- si $m = -2 \Rightarrow n = 1$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1} & \text{si} \quad x \le -2 \\ -x+2 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ x^2 - 7x + 10 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$



- Si $m = -\dfrac{8}{3} \Rightarrow n = \dfrac{-1}{3}$, entonces

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\frac{8}{3}}{x-\frac{1}{3}} & \text{si} \quad x\leq -2 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{8}{3} & \text{si} \quad -2<x\leq 2 \\ x^2-7x+\dfrac{40}{3} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$



Note que en ninguno de los dos casos se tiene que $n\in \left]-\infty,-2\right]$, por lo tanto en ambos la función sería continua en $\mathbb{R}$.

3. Determine la ecuación de las dos rectas tangentes a la gráfica de la curva $y=4x-x^2$ y que además pasan por el punto de coordenadas $(2,5)$. (6 puntos)

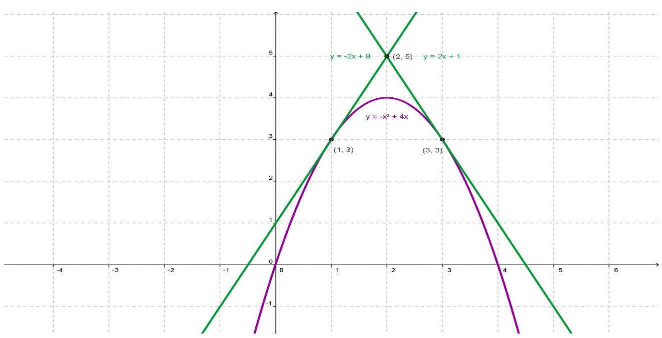
Sea $(a,b)=(a,4a-a^2)$ un punto de tangencia. Como $y=4x-x^2 \Rightarrow y'=4-2x$. Al evaluar la derivada en $x=a$ se tiene que la pendiente de la recta tangente en (a,b) es $m_t=4-2a$. Como la recta contiene a los puntos de coordenadas (a,b) y $(2,5)$, la pendiente de la recta tangente también está dada por $\dfrac{b-5}{a-2}=\dfrac{4a-a^2-5}{a-2}$, entonces debe cumplirse que

$$\begin{aligned} &\frac{4a-a^2-5}{a-2}=4-2a \\ &\Rightarrow 4a-a^2-5=(4-2a)(a-2) \\ &\Rightarrow 4a-a^2=-2a^2+8a-3 \\ &\Rightarrow -a^2+4a-3=0 \\ &\Rightarrow a=3 \vee a=1. \end{aligned}$$

Si $a=3$ entonces la ecuación de la recta está dada por $y=-2x+9$.

Si $a=1$ entonces la ecuación de la recta está dada por $y=2x+1$.

A continuación se tiene la representación gráfica:



4. Si $f'(a)$ existe, demuestre que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\,f(a)-a\,f(x)}{x-a}=f(a)-a\,f'(a)\cdot$ (4 puntos)

Como $f'(a)$ existe entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$. Se tiene entonces :

$$\lim_{x\to a}\frac{x\,f(a)-a\,f(x)}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)+af(a)-af(a)}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)-af(x)+af(a)}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(a)(x-a)-a\left[f(x)-f(a)\right]}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(a)(x-a)}{x-a}-\frac{a\left[f(x)-f(a)\right]}{x-a}\right\}=$$
$$\lim_{x\to a}\left\{f(a)-\frac{a\left[f(x)-f(a)\right]}{x-a}\right\}=$$
$$f(a)-a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$$
$$f(a)-af'(a)$$

5. En cada caso determine $\dfrac{dy}{dx}$. No es necesario simplificar su resultado.

5.1 $y=\operatorname{sen}^3\left(5x^2+3\right)\left(x+e^{-2x+1}\right)$ (7 puntos)

$$y=3\operatorname{sen}^2\left(5x^2+3\right)\cdot\cos\left(5x^2+3\right)\cdot 10x\cdot\left(x+e^{-2x+1}\right)+\operatorname{sen}^3\left(5x^2+3\right)\left(1+e^{-2x+1}\cdot -2\right)$$

5.2 $y=\dfrac{5-\cot\left(\dfrac{3}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+\tan x}}$ (7 puntos)

$$y'=\frac{\csc^2\left(\dfrac{3}{x^2}\right)\cdot -6x^{-3}\cdot\sqrt[3]{x^2+\tan x}-\left[5-\cot\left(\dfrac{3}{x^2}\right)\right]\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+\tan x\right)^2}}\cdot\left(2x+\sec^2 x\right)}{\left[\sqrt[3]{x^2+\tan x}\right]^2}$$

-fin-