Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM

Proyecto MATEM: Cálculo I
III Examen Parcial - Solucionario

Total de puntos: 45

Parte única: Desarrollo

1) (7 puntos) Hallar la función $y = f(x)$ que satisface las siguientes condiciones:

$$f'(0) = 2 \qquad f(0) = 1 \qquad f''(x) = 3e^x + 5\operatorname{sen} x$$

$f'(x) = \displaystyle\int \big(3e^x + 5\operatorname{sen}(x)\big)\, dx = 3e^x - 5\cos(x) + C$
$f'(0) = 3e^0 - 5\cos(0) + C = 2$
$C = 4$
Por lo tanto,
$f(x) = \displaystyle\int (3e^x - 5\cos(x) + 4)dx =$
$3e^x - 5\operatorname{sen}(x) + 4x + C$
$f(0) = 3e^0 - 5\operatorname{sen}(0) + 4 \cdot 0 + C = 1$
$C = -2$
Entonces,
$f(x) = 3e^x - 5\operatorname{sen}(x) - 2$

2) (4 puntos) Sea $g(x) = \displaystyle\int_{\tan(x)}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}} dx$. Determine $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2+x^8}} - \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{2+\tan^4(x)}}$$

3) (6 puntos) Considere la función f integrable que satisface la siguiente igualdad:

$$A(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^8}{8} + \frac{x^6}{6} + c$$

Determine el criterio de f.

Dado que $\displaystyle\int_x^1 t^2 f(t)dt = -\int_1^x t^2 f(t)dt$
$A'(x) = f(x) = -x^2 f(x) + x^7 + x^5$
$f(x) + x^2 f(x) = x^7 + x^5$
$f(x)(1 + x^2) = x^5(1 + x^2)$
$f(x) = x^5$

4) (21 puntos) Calcule las siguientes integrales:

a) (6 puntos) $\displaystyle\int \frac{e^{\text{sen}(2x)}}{\sec(2x)}dx$

$\displaystyle\int \cos(2x)e^{\text{sen}(2x)}dx$
Sea $u = \text{sen}(2x) \Rightarrow du = 2\cos(2x)dx \Rightarrow \frac{du}{2} = \cos(2x)dx$
Entonces,
$\frac{1}{2}\displaystyle\int e^u du =$
$\frac{1}{2}e^u + C =$
$\frac{1}{2}e^{\text{sen}(2x)} + C$

b) (3 puntos) $\displaystyle\int \frac{(1 + \ln(x))^4}{x}dx$

Sea $u = 1 + \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$
$\displaystyle\int u^4 du =$
$\dfrac{u^5}{5} + C$

c) (7 puntos) $\displaystyle\int_0^3 \big(x + |x-2|\big)\, dx$

$|x-2| = \begin{cases} x-2, \; x \geq 2 \\ 2-x, \; x < 2 \end{cases}$

$\displaystyle\int_0^3 (x + |x-2|\, dx =$

$\displaystyle\int_0^2 (\cancel{x} + 2 - \cancel{x}) dx + \int_2^3 (x + x - 2) dx =$

$(2x)\Big|_0^2 + (x^2 - 2x)\Big|_2^3 =$

$4 + 3 = 7$

d) (5 puntos) $\displaystyle\int \sec(x) dx$

$\displaystyle\int \frac{\sec(x)(\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx =$

$\displaystyle\int \frac{\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx =$

Sea $u = \sec(x) + \tan(x) \Rightarrow du = (\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x))dx$

Por lo tanto,

$\displaystyle\int \sec(x) dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\big|\sec(x) + \tan(x)\big| + C$

5) (7 puntos) Determine el área de la región limitada por las siguientes curvas:

$$y = x^2 - 2 \qquad y = x + 4$$

Obteniendo los puntos de intersección:

$x^2 - 2 = x + 4$

$x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow x = 3 \qquad x = -2$

Luego,

$\displaystyle A(x) = \int_{-2}^3 \big((x+4) - (x^2 - 2)\big)\, dx =$

$\displaystyle\int_{-2}^3 \big(x + 6 - x^2\big)\, dx =$

$\displaystyle\left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^3 =$

$\displaystyle\left(\frac{3^2}{2} + 63 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) =$

$\displaystyle\frac{125}{6} u.A.$