



Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática

Proyecto MATEM

<http://matem.emate.ucr.ac.cr/>

tel. (506) 2511-4528

matem.em@ucr.ac.cr



Nota: Este documento es solamente una de las varias versiones aplicadas del primer examen parcial.

I Parcial

Instrucciones

- 1) Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
- 2) Este examen consta un total de 40 puntos los cuales se distribuyen en selección única (23 puntos), identifique (10 puntos) y desarrollo (7 puntos).
- 3) La prueba está **disponible del sábado 8 de agosto de 2020 a las 8:00 a.m. hasta las 12:00 m.d.**, en ese intervalo de tiempo deberá resolverlo y enviarlo para su calificación.
- 4) En caso de **dudas** con respecto a algún ítem del examen, el estudiante deberá enviar un correo con las dudas al correo del proyecto: **matem.em@ucr.ac.cr** y el asunto del correo debe ser "Duda examen cálculo".
- 5) En caso de inconvenientes de fuerza mayor que afecten el desarrollo del examen del estudiante, debe de comunicarse con su profesor encargado para que haga el reporte debido a la coordinación MATEM para que valore la situación e indique las acciones a seguir.
- 6) La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 3 horas, sin embargo se habilitará en la plataforma durante 4 horas . El estudiante debe prepararse con la antelación suficiente antes de la hora establecida para el inicio de la prueba. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
- 7) La plataforma le permite ingresar en varias oportunidades mientras se encuentre dentro del lapso establecido y no haya finalizado la prueba. Tome en cuenta que, para efectos de calificación, sus respuestas no quedarán guardadas a menos que ya haya enviado la prueba para su calificación.
- 8) Para responder la sección de **desarrollo** debe seguir las siguientes indicaciones:
 - a) Contestar en hojas la pregunta en forma clara, ordenada, **a mano**, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. En cada página debe indicar su nombre y apellidos así como el código de estudiante que se le asignó en el proyecto.
 - b) Incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta.
 - c) Digitalizar la solución del ejercicio de modo que el procedimiento aparezca en un solo archivo pdf (solamente se aceptará ese formato). Para lograr esto se puede utilizar fotos, escanear o incluso aplicaciones de celular que convierten imágenes a formato pdf. Debe asegurarse de que el archivo sea legible y claro.
 - d) Nombrar el archivo con la información de número de código de estudiante (otorgado por el proyecto MATEM), nombre y Colegio, como se muestra en el siguiente ejemplo: "12345678.FernandoAguilar.ColegioX"
 - e) Subir el archivo pdf en el espacio indicado en el examen.
- 9) Cuando esté seguro(a) de sus respuestas debe seleccionar la opción "**terminar intento**" y luego "**enviar todo y terminar**" para que dichas respuestas sean debidamente consignadas en el sistema. Después de esto no podrá realizar cambios. En caso de no seleccionar esta opción, su calificación será cero.
- 10) El sistema califica automáticamente la parte de selección única, mientras que la parte de desarrollo es revisada y calificada posteriormente. Debido a lo anterior, el sistema le indicará que su examen está incompleto a pesar de que usted lo haya terminado.
- 11) El trabajo debe realizarse de **manera individual**. Se asume que usted actuará con total honestidad, sin utilizar **recursos no permitidos** durante la prueba como aplicaciones de celular, páginas de internet, libros y materiales del curso, además de consultar a otras personas que le ayuden a resolver los ejercicios de la prueba. En caso contrario se le anulará la prueba.
- 12) **No se permite la divulgación de preguntas por medio de grupos de WhatsApp, redes sociales o similares.**
- 13) Se le recomienda no enviar el examen a una hora cercana al cierre de la prueba (indicada anteriormente) por si se dieran inconvenientes.

1

Sea la función con criterio $f(x) = e^x$ definida en su dominio máximo, entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{e} \right]$ es igual a

Seleccione una:

- 1
- $+\infty$
- $-\infty$
- 0

2

Sea f una función y sea $k \in \mathbb{R}$. Se puede afirmar que $\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)]$ es equivalente a

Seleccione una:

- $k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$
- k .
- $k \cdot f(a)$.

3

Analice las siguientes afirmaciones referidas a una función $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

I. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$ entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal en la gráfica de k .

II. Si en $y = 0$ hay una asíntota horizontal de la gráfica de k entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 0$.

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

Seleccione una:

- Ambas
- Solo la II
- Solo la I
- Ninguna

4

Considere la función f definida en su dominio máximo y de criterio $f(x) = \frac{2}{x-3} + 5$. La ecuación de la asíntota vertical a la gráfica de f corresponde a:

Seleccione una:

- $x = 2$
- $x = 3$
- $x = -3$
- $x = 5$

5

¿Cuál es el valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - 4x + 5}{2x^2 - x - 1}$?

Seleccione una:

- -2
- $\frac{4}{3}$
- 2
- -3

6

Al calcular $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{1-\sqrt{2x-9}} \right)$ se obtiene como resultado

Seleccione una:

- 0
- -1
- $\frac{-1}{5}$
- 1

7

Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3}$$

Seleccione una:

- 6
- $\frac{1}{6}$
- $-\frac{1}{6}$
- 6

8

El resultado del $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 2^{\sec(x)}$ corresponde a

Seleccione una:

- no existe
- $\frac{1}{2}$
- 0
- 1

9

Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Seleccione una:

- 2
- 1
- 2
- 0

10

El $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)(1 - x)}$ corresponde a

Seleccione una:

- a. $-\infty$
- b. $+\infty$
- c. 12
- d. 0

11

Un cambio de variable adecuado para calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ sin que posea radicales es

Seleccione una:

- $x = u^4$
- $x = u^6$
- $x = u^{12}$
- $x = u^2$

12

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y además $f(x) = \frac{8x^3 + x^2 - 1}{4x^3 - 2x}$ y $h(x) = \frac{4x^2 - 18x + 16}{2x^2 + 9}$ entonces el $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$

Seleccione una:

- 2
- 2
- 2
- 8

13

Considere la función f definida en su dominio máximo y de criterio $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$

f presenta discontinuidad inevitable en:

Seleccione una:

- $x = -1$
- $x = -3$
- $x = 3$
- $x = 1$

14

Considere la función f cuyo criterio está dado por $f(x) = \begin{cases} c^2x & \text{si } x \leq 1 \\ 3cx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Un valor de c para que la función f sea continua en $x = 1$ es:

Seleccione una:

- 3
- 2
- 1
- 2

15

Si una función f es continua en $x = a$ entonces:

Seleccione una:

- $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- la función es continua en todo \mathbb{R}
- no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

16

Considere la siguiente proposición:

La función f de criterio $f(x) = \frac{5x}{x-5}$ presenta discontinuidad evitable en $x = 5$.

Con certeza, la proposición anterior es :

Elija una;

- Verdadero
- Falso

17

Considere la función f cuyo criterio está dado por $f(x) = ((x^2 + 3)^5 + x)^2$, entonces su primera derivada corresponde a:

Seleccione una:

- $f'(x) = 2(10x(x^2 + 3)^4 + 1)((x^2 + 3)^5 - x)$
- $f'(x) = 2(10x(x^2 + 3)^4 - 1)((x^2 + 3)^5 + x)$
- $f'(x) = 2(10x(x^2 + 3)^4 + 1)((x^2 + 3)^5 + x)$
- $f'(x) = 2(10x(x^2 + 3)^4 - 1)((x^2 + 3)^5 - x)$

18

Sea $f(x) = \frac{3}{5} \cos(x) - 4e^x$.

Si $f'(x) = (k) - 4e^x$, entonces k corresponde a la expresión:

Seleccione una:

- $3\text{sen}(x)$
- $-\frac{3}{5}\text{sen}(x)$
- 0
- $\frac{3}{5}\text{sen}(x)$

19

Para $f(x) = \sqrt{x}$. Si $f'(c) = \frac{1}{8}$ y $c \in \mathbb{R}^+$, el valor de c corresponde a:

Seleccione una:

- $\frac{1}{16}$
- 1
- 16
- 4

20

Al derivar la función con criterio $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ se obtiene que

$$f'(x) = -\frac{1}{p} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

Entonces p corresponde a la expresión:

Seleccione una:

- x
- x^2
- x^{-1}
- e

21

Considere la función f cuyo criterio está dado por $f(x) = \text{sen}^5(x^3 - x + 3)$.

$$\text{Si } f'(x) = 5 \text{sen}^4(x^3 - x + 3) \cdot \cos(x^3 - x + 3) \cdot (k)$$

Entonces k corresponde a la expresión:

Seleccione una:

- $3x - 1$
- $x^3 - x + 3$
- $3x^2 - 1$
- $3x^2$

Sean f, g funciones diferenciables, dada la igualdad

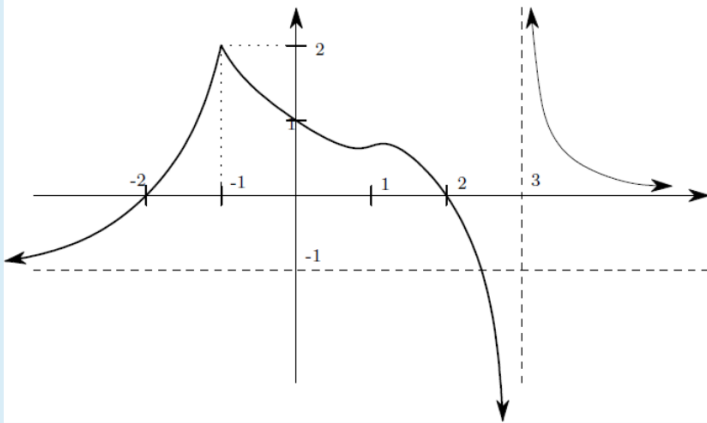
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(m)}$$

Se puede afirmar que m corresponde a la expresión:

Seleccione una:

- $f(x)$
- $g^2(x)$
- $f^2(x)$
- $g(x)$

Considere la gráfica de la función f dada a continuación:



A continuación aparecen algunos límites. Escoja su correspondiente resultado según las opciones dadas. Se pueden repetir opciones.

¿Existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?

Elegir... ▾

¿Cuál es la ecuación de la asíntota vertical?

Elegir...

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

negativo

¿Cuál es el signo de $f'(4)$?

si

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

-1

¿Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

1

¿Cual es un valor del dominio de f donde la función es continua pero no derivable?

y=3

¿Cuál es el signo de $f'(-2)$?

0

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

2

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

positivo

x=3

no

Elegir... ▾

Determine las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a $j(x) = 3\sqrt{x^2 + 5} - 8$ en $x = 2$.
(7 puntos)

Para responder la sección de **desarrollo** debe seguir las siguientes indicaciones:

- Contestar en hojas la pregunta en forma clara, ordenada, **a mano**, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. En cada página debe indicar su nombre y apellidos así como el código de estudiante que se le asignó en el proyecto.
- Incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta.
- Digitalizar la solución del ejercicio de modo que el procedimiento aparezca en un solo archivo pdf (solamente se aceptará ese formato). Para lograr esto se puede utilizar fotos, escanear o incluso aplicaciones de celular que convierten imágenes a formato pdf. Debe asegurarse de que el archivo sea legible y claro.
- Nombrar el archivo con la información de número de código de estudiante (otorgado por el proyecto MATEM), nombre y Colegio, como se muestra en el siguiente ejemplo: "12345678.FernandoAguilar.ColegioX"
- Subir el archivo pdf en el espacio indicado en el examen.

Tamaño máximo para archivos nuevos: 512MB, anexos máximos: 1

Archivos

Arrastre y suelte los archivos aquí para subirlos

SOLUCIONARIO

- 1) 0
2) $k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3) Solo la I
4) $x = 2$
5) -2
6) -1
7) -6
8) 0
9) 2
10) $-\infty$
11) $x = u^{12}$
12) 2
13) $x = 1$
14) 2
15) Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
16) Falso
17) $f'(x) = 2(10x(x^2 + 3)^4 - 1)((x^2 + 3)^5 - x)$
18) $-\frac{3}{5} \text{sen}(x)$
19) 16
20) x^2
21) $3x^2 - 1$
22) $g^2(x)$

23)

¿Existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?

no

¿Cuál es la ecuación de la asíntota vertical?

x=3

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

2

¿Cuál es el signo de $f'(4)$?

negativo

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

-1

¿Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

si

¿Cual es un valor del dominio de f donde la función es continua pero no derivable?

-1

¿Cuál es el signo de $f'(-2)$?

positivo

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

0

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1

- 24) Determine la ecuación de la recta tangente y la recta normal a $j(x) = 3\sqrt{x^2 + 5} - 8$ en $x = 2$. (7 puntos)

$$j(2) = 3\sqrt{2^2 + 5} - 8 = 1 \text{ por tanto, se tiene el par ordenado } (2, 1)$$

$$j'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}} \cdot 2x$$

$$m_{RT} = j'(2) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2^2 + 5}} \cdot 2(2) = 2$$

$$b_{RT} = 1 - 2 \cdot 2 = -3$$

La ecuación de la recta tangente es $y = 2x - 3$.

$$m_{RN} = \frac{-1}{j'(2)} = \frac{-1}{2}$$

$$b_{RN} = 1 - \frac{-1}{2} \cdot 2 = 2$$

La ecuación de la recta normal es $y = \frac{-1}{2}x + 2$.