EMat Escuela de Matemática

Universidad de Costa Rica

Proyecto MATEM

MATEM Matemática para la Enseñanza Media

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

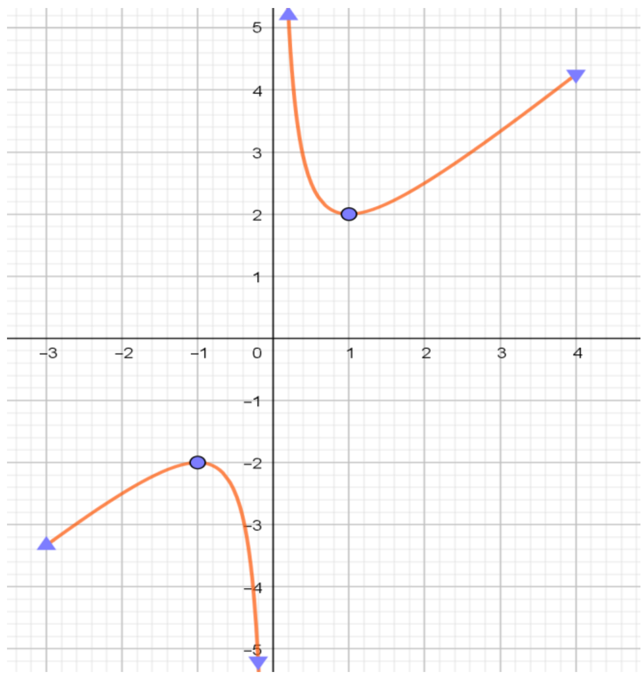
22 de junio de 2019

INSTRUCCIONES GENERALES:

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de dos partes: Respuesta Breve y Desarrollo, para un total de 75 puntos.**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas**.

I **Parte. Respuesta Breve.** Escriba en el espacio correspondiente el o los objetos matemáticos (ecuación, conjunto, valor, etc.) que completan correctamente cada oración. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** *(6 puntos, un punto cada respuesta correcta).*

Para los ítems del 1 al 6, utilice como referencia la siguiente gráfica.



1) La ecuación de la asíntota vertical corresponde a…………………………________________________.
2) Un intervalo donde $f'(x) > 0$ corresponde a...……………….……………________________________.
3) El (o los) conjunto (s) donde $f''(x) > 0$ corresponde(n) a...…………………________________________.
4) El valor de x donde f alcanza un máximo relativo corresponde a………__________________________.
5) El valor de x donde f alcanza un mínimo relativo corresponde a………__________________________.
6) Un intervalo que satisfaga el teorema del Valor Medio…………………__________________________.

II Parte. Desarrollo. Debe escribir todo los procedimientos, en su cuaderno de examen, que justifiquen cada una de sus respuestas.

1. Considere la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

   a) ***(6 puntos)*** Compruebe que $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{y^3}}$

   b) ***(4 puntos)*** Determine, la ecuación de la recta tangente normal a la curva, en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2) Determine en cada caso y', no es necesario simplificar. **(10 puntos, 5 puntos cada uno)**

   a) $arcsen(x + y^3) = xy$

   b) $y = \frac{3x^2\cos(2x)}{(\arctan(x))^2}$

3) Calcule los siguientes límites: (**14 puntos, 7 puntos cada uno**)

   a) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-cos(2x)+tan^2(x)}{xsen(x)}\right]$

   b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

4) Resuelva los siguientes problemas:

   a) ***(8 puntos)*** Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo isósceles de base $b = 4$ y altura $h = 6$.

   b) ***(7 puntos)*** Un obrero sostiene, desde el suelo, una cuerda, de $36\ m$ de longitud y al otro extremo de la cuerda hay un peso. La cuerda pasa por una polea situada a $20\ m$ de altura. Si el obrero se aleja del peso a razón constante de 5 m/s, ¿con qué rapidez se eleva el peso cuando está a 10 metros por encima de la posición original?

5) ***(20 puntos)*** Trace la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{(2x-3)^2}$, definida en su dominio máximo, si se sabe que,

$$f'(x) = \frac{-2x-3}{2x-3^3} \qquad\qquad f''(x) = \frac{8(x+3)}{(2x-3)^4}$$

a) Determine el dominio máximo de la función y los puntos de intersección — 3 puntos

b) Determine, si existen, ecuaciones de las asíntotas de la gráfica — 3 puntos

c) Determine los intervalos de monotonía y puntos extremos — 4 puntos
(dónde crece, dónde decrece, cuáles son los puntos máximos y mínimos relativos)

d) Analice la concavidad y escriba los intervalos correspondientes. Si hay puntos de inflexión, indíquelos. — 4 puntos

e) Construya el cuadro de variación — 3 puntos

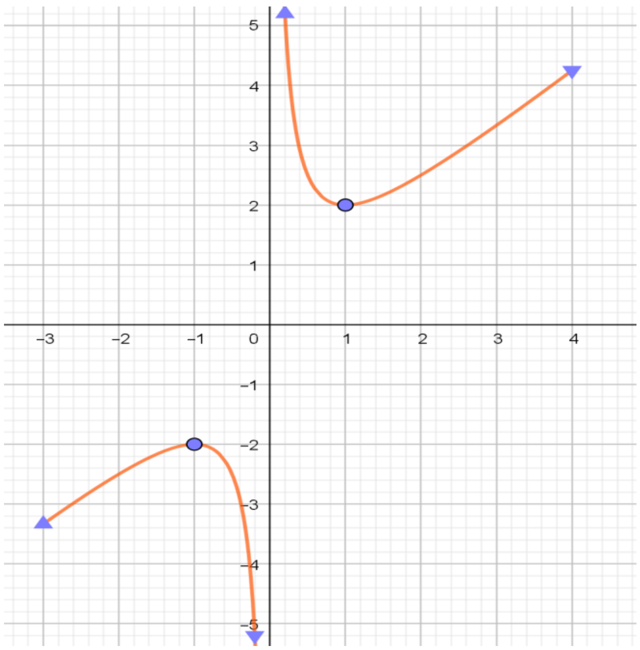
f) Con la información obtenida, construya la gráfica de f en su máximo dominio — 3 puntos

SOLUCIONARIO SEGUNDO EXAMEN PARCIAL CÁLCULO

22 de junio de 2019

***I* Parte. Respuesta Breve.** Escriba en el espacio correspondiente el o los objetos matemáticos (ecuación, conjunto, valor, etc.) que completan correctamente cada oración. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** *(6 puntos, un punto cada respuesta correcta).*

Para los ítems del 1 al 6, utilice como referencia la siguiente gráfica.



1) La ecuación de la asíntota vertical corresponde a .... $x = 0$.
2) Un intervalo donde $f'(x) > 0$ corresponde a .... $]-1,0[$ o $]0,1[$ o $subintervalos$.
3) El (o los) conjunto (s) donde $f''(x) > 0$ corresponde (n) a .... $]0,+\infty[$.
4) El valor numérico donde f alcanza un máximo relativo corresponde a .... $x = -1$.
5) El valor numérico donde f alcanza un mínimo relativo corresponde a .... $x = 1$.
6) El valor cuya existencia está garantizada por el teorema del Valor Medio................................ *cualquier intervalo cerrado que no incluya el cero.*

II Parte. Desarrollo. Debe escribir todo los procedimientos, en su cuaderno de examen, que justifiquen cada una de sus respuestas.

1. Considere la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

a) $(\boldsymbol{6\ puntos})$ Compruebe que $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{y^3}}$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y-(-x)\frac{dy}{dx}}{y^2} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y-x\cdot\frac{x}{y}}{y^2} = \frac{-\left(\frac{y^2+x^2}{y}\right)}{y^2} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{yy^2} = \frac{-1}{y^3} \qquad (2)$$

b) ***(4 puntos)*** Determine, la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\to \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\to \frac{dy}{dx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \qquad (1)$$

$$\to \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + b \qquad (1)$$

$$\to b = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \qquad (1)$$

$$\therefore y = -x + \sqrt{2} \qquad (1)$$

2) **(10 puntos)** Determine en cada caso y', no es necesario simplificar.

a) (5 puntos) $arcsen(x + y^3) = xy$

$$\frac{1+3y^2\boldsymbol{y'}}{\sqrt{1-(x+y^3)^2}} + 3y^2\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{xy'} \qquad (1)$$

$$1 + 3y^2\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{y}\sqrt{1-(x+y^3)^2} + \boldsymbol{xy'}\sqrt{1-(x+y^3)^2} \qquad (1)$$

$$3y^2\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{xy'}\sqrt{1-(x+y^3)^2} = \boldsymbol{y}\sqrt{1-(x+y^3)^2} - 1 \quad (1)$$

$$\boldsymbol{y'}\left(3y^2 - \boldsymbol{x}\sqrt{1-(x+y^3)^2}\right) = \boldsymbol{y}\sqrt{1-(x+y^3)^2} - 1 \quad (1)$$

$$\boldsymbol{y'} = \frac{\boldsymbol{y}\sqrt{1-(x+y^3)^2}-1}{\left(3y^2-\boldsymbol{x}\sqrt{1-(x+y^3)^2}\right)} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{y'} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\boldsymbol{3y^2-x}} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\sqrt{1-x^2}(\boldsymbol{3y^2-x})} \quad (2)$$

b) ***(5 puntos)*** $y = \frac{3x^2\cos(2x)}{(\arctan(x))^2}$

$$y' = \frac{(6x\cos(2x) - 6x^2 sen(2x))(arctan(x))^2 - \frac{2\arctan(x)(3x^2\cos(2x))}{(x^2+1)}}{(\arctan(x))^4}$$

3) **(14 puntos)** Calcule los siguientes límites: (7 puntos cada uno)

a) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-cos2x+tan^2x}{xsenx}\right]$=______3__________________

F.I. $\frac{0}{0}$, aplicando L´Hopital, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2sen(2x)+2\tan(x)sec^2(x)}{sen(x)+xcos(x)}$ F.I. $\frac{0}{0}$ (3 puntos)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2\cos(2x)+2sec^2(x)\cdot sec^2(x)+2sec^2(x)\tan^2(x)}{\cos(x)+\cos(x)-xsen(x)} \quad \text{(3 puntos)}$$

$$= \frac{4+2+2\cdot 0}{1+1-0} = 3 \quad \text{(1 punto)}$$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$=________$\frac{1}{e}$__________________

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^x} \quad (2)$$

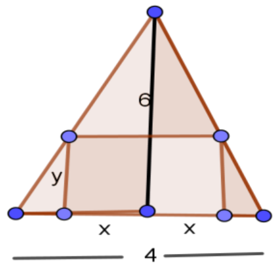
Ahora, $\lim\limits_{x\to\infty} ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}\left(F.I\ \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1} = -1$

(4 puntos)

$\lim_{x\to\infty} e^{-1} = e^{-1}$ (1)

4) Resuelva los siguientes problemas:

a) ***(8 puntos)*** Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo isósceles de base $b = 4$ y altura $h = 6$.



$$\frac{y}{6} = \frac{2-x}{2}$$

$\rightarrow \mathrm{y = 3(2-x) = 6 - 3x}$

$A = 2xy$

$A(x) = 2x(6-3x)$

$A(x) = 12x - 6x^2$

$A'(x) = 12 - 12x$

$A'(x) = 12 - 12x = 0$

$x = 1$

Demostrar que es un máximo:

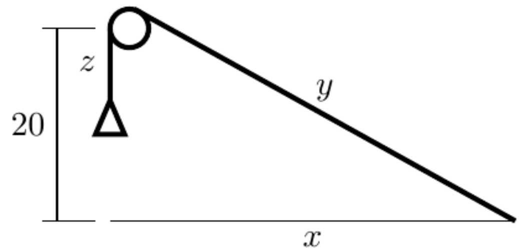
$A'(x) > 0 \; \forall \, x \in [1, +\infty[$

$A'(x) < 0 \; \forall \, x \in \,]-\infty, 1] \;\therefore\; 1 \; es \; un \; máximo.$

Las dimensiones del rectángulo son 2x3.

(puede resolverse con otros métodos)

b) ***(7 puntos)*** Un obrero sostiene, desde el suelo, una cuerda, de $36\ m$ de longitud y al otro extremo de la cuerda hay un peso. La cuerda pasa por una polea situada a $20\ m$ de altura. Si el obrero se aleja del peso a razón constante de 5 m/s, ¿con qué rapidez se eleva el peso cuando está a 10 metros por encima de la posición original?



(1)

$\frac{dx}{dt}$=5 cuando $z = 10$

$z + y = 36 \ \rightarrow \ y = 36 - z$ (1)

Por Pitágoras, $20^2 + x^2 = (36 - z)^2$ (1)

Derivando implícitamente:

$2x\frac{dx}{dt} = -2(36 - z)\frac{dz}{dt}$ (1)

Para z= 10, obtenemos $x = 16.61$ (1)

Y despejando $\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt}}{-2(36-z)}$ y sustituyendo los valores dados (1)

$\frac{dz}{dt} = \frac{2 \cdot 16.61 \cdot 5}{-2(36-10)} = -3.16\frac{m}{s}$ (1)

5) ***(20 puntos)*** Trace la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{(2x-3)^2}$, definida en su dominio máximo, si se sabe que,

$f'(x) = \frac{-2x-3}{(2x-3)^3}$ $f''(x) = \frac{8(x+3)}{(2x-3)^4}$

a) Determine el dominio máximo de la función y los puntos de intersección 3 puntos

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \qquad (1)$$
$$\cap_y = \cap_x : (0,0) \qquad (2)$$

b) Determine, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica 3 puntos

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty$$
$\therefore \ x = \frac{3}{2}$ es una AV.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \ \therefore \ y = 0 \ es\ una\ AH.$$

c) Determine los intervalos de monotonía y puntos extremos 4 puntos
(dónde crece, dónde decrece, cuáles son los puntos máximos y mínimos relativos)

$$f'(x) = \frac{-2x-3}{(2x-3)^3} > 0$$

		$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$-2x-3$	+	-	-
$(2x-3)^3$	-	-	+
f	↘	↗	↘

Punto mínimo: $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{24}\right)$

f es creciente $\forall x \in \left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right[$ y es decreciente $\forall \ x \in \left]-\infty, \frac{-3}{2}\right]$ y $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

d) Analice la concavidad y escriba los intervalos correspondientes. Si hay puntos de inflexión, indíquelos. 4 puntos

$f''(x) = \frac{8(x+3)}{(2x-3)^4} > 0, \quad \forall x \in \left]-3, \frac{3}{2}\right[\ y \ \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$, donde es cóncava hacia arriba

$f''(x) = \frac{8(x+3)}{(2x-3)^4} < 0, \quad \forall x \in \left]-\infty, -3\right[$, donde es cóncava hacia abajo

$$Hay\ cambio\ de\ concavidad\ en\ x = -3$$

$\therefore \ en\ x = -3$ existe un punto de inflexión $\left(-3, \frac{-1}{27}\right)$

e) Construya el cuadro de variación 3 puntos

	-3	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$		
$f´$	↘	↘	↗	↘	
$f´´$	↷	↺	↺	↺	
f	↘↷	↘↺	↺↗	↘↺	

f) Con la información obtenida, construya la gráfica de f en su máximo dominio 3 puntos