Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática

Proyecto MATEM

http://matem.emate.ucr.ac.cr/

tel. (506) 2511-4528

matem.em@ucr.ac.cr

Nota: Este documento es solamente una de las varias versiones aplicadas del segundo examen parcial.

II Parcial

Instrucciones

1) Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.

2) Este examen consta un total de 50 puntos los cuales se distribuyen en selección única (21 puntos), identifique (22 puntos) y desarrollo (7 puntos).

3) La prueba está **disponible del sábado 26 de septiembre de 2020 a las 8:00 a.m. hasta las 12:00 m.d.**, en ese intervalo de tiempo deberá resolverlo y enviarlo para su calificación.

4) En caso de **dudas** con respecto a algún ítem del examen, el estudiante deberá enviar un correo con las dudas al correo del proyecto: **matem.em@ucr.ac.cr** y el asunto del correo debe ser **"Duda examen cálculo"**.

5) En caso de inconvenientes de fuerza mayor que afecten el desarrollo del examen del estudiante, debe de comunicarse con su profesor encargado para que haga el reporte debido a la coordinación MATEM para que valore la situación e indique las acciones a seguir.

6) La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 3 horas, sin embargo se habilitará en la plataforma durante 4 horas . El estudiante debe prepararse con la antelación suficiente antes de la hora establecida para el inicio de la prueba. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.

7) La plataforma le permite ingresar en varias oportunidades mientras se encuentre dentro del lapso establecido y no haya finalizado la prueba. Tome en cuenta que, para efectos de calificación, sus respuestas no quedarán guardadas a menos que ya haya enviado la prueba para su calificación.

8) Para responder la sección de **desarrollo** debe seguir las siguientes indicaciones:

   a) Contestar en hojas la pregunta en forma clara, ordenada, **a mano**, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. En cada página debe indicar su nombre y apellidos así como el código de estudiante que se le asignó en el proyecto.

   b) Incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta.

   c) Digitalizar la solución del ejercicio de modo que el procedimiento aparezca en un solo archivo pdf (solamente se aceptará ese formato). Para lograr esto se puede utilizar fotos, escanear o incluso aplicaciones de celular que convierten imágenes a formato pdf. Debe asegurarse de que el archivo sea legible y claro.

   d) Nombrar el archivo con la información de número de código de estudiante (otorgado por el proyecto MATEM), nombre y Colegio, como se muestra en el siguiente ejemplo: "12345678.FernandoAguilar.ColegioX"

   e) Subir el archivo pdf en el espacio indicado en el examen (debe verificar que está adjuntado el archivo correcto).

9) Cuando esté seguro(a) de sus respuestas debe seleccionar la opción **"terminar intento"** y luego **"enviar todo y terminar"** para que dichas respuestas sean debidamente consignadas en el sistema. Después de esto no podrá realizar cambios. En caso de no seleccionar esta opción, su calificación será cero.

10) El sistema califica automáticamente la parte de selección única e identifique, mientras que la parte de desarrollo es revisada y calificada posteriormente. Debido a lo anterior, el sistema le indicará que su examen está incompleto a pesar de que usted lo haya terminado.

11) El trabajo debe realizarse de **manera individual**. Se asume que usted actuará con total honestidad, sin utilizar **recursos no permitidos** durante la prueba como aplicaciones de celular, páginas de internet, libros y materiales del curso, además de consultar a otras personas que le ayuden a resolver los ejercicios de la prueba. En caso contrario se le anulará la prueba.

12) **No se permite la divulgación de preguntas por medio de grupos de WhatsApp, redes sociales o similares**.

13) Se le recomienda finalizar el examen con suficiente tiempo de anticipación a la hora de cierre de la prueba (indicada anteriormente) por si se dieran inconvenientes.

14) La nota obtenida en la prueba está disponible a partir del 12 de octubre a las 5 p.m. aproximadamente.

Intentos permitidos: 1

1

Considere la curva $2x^3 + y^3 = 275$, entonces $\frac{dy}{dx}$ cumple que

Seleccione una:

- $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2}{y^2}$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{275 - 6x^2}{3y^2}$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{y^2}$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{275 + 6x^2}{3y^2}$

2

Sea $y = \frac{-4}{(x+2)^3}$ y $y' = \frac{12}{(x+2)^4}$, entonces el valor de $y''(-1)$ corresponde a

Seleccione una:

- -48
- -12
- -4
- $\frac{3}{2}$

3

Considere la ecuación $x \cdot y = 2$ la cual satisface que $y' = \frac{-y}{x}$ y $y'' = \frac{2y}{x^2}$.

Considere las siguientes proposiciones:

I. y'' también es equivalente a la expresión $\frac{4}{x^3}$.

II. $y \cdot y' = -y''$.

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

Seleccione una:

- Solo la II
- Solo la I
- Ambas
- Ninguna

4

Al derivar la función $g(x) = \ln x^4$ se obtiene que

Seleccione una:

- $g'(x) = \dfrac{4}{x^3}$
- $g'(x) = -\dfrac{4}{x}$
- $g'(x) = \dfrac{4}{x}$
- $g'(x) = \dfrac{4}{x^4}$

5

Si se sabe que $y = f(x)^{g(x)}$ cumple que:

$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot [g(x) \cdot \ln(f(x))]',$$

entonces para la función con criterio $y = (3x)^{\cos(x^3)}$, se cumple que $[g(x) \cdot \ln(f(x))]'$ es equivalente a la expresión

Seleccione una:

- $\left(-\text{sen}(x^3)\ln(3x) - \dfrac{cos(x^3)}{3x}\right)$
- $\left(-3x^2\text{sen}(x^3) \cdot \dfrac{1}{x}\right)$
- $\left(-3x^2\text{sen}(x^3)\ln(3x) + \dfrac{\cos(x^3)}{x}\right)$
- $\left(3x^2\text{sen}(x^3)\ln(3x) + \dfrac{\cos(x^3)}{x}\right)$

6

Considere la ecuación $y = \dfrac{x^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ y determine la veracidad de las siguientes proposiciones:

Para facilitar el cálculo de la derivada se pueden utilizar propiedades de los logaritmos, por lo que la ecuación anterior quedaría reescrita como:

I. $y = \dfrac{3}{4}\ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$

II. $\ln(y) = \dfrac{3}{4}\ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$

De esta forma se puede asegurar que :

III. $y' = \left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{15}{3x+2}\right) \cdot \dfrac{x^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

IV. $y' = \left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{15}{3x+2}\right)$

7

La derivada de la función con criterio $y = \arcsin(2x)$ corresponde a

Seleccione una:

- $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$
- $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
- $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$
- $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-2x^2}}$

8

La derivada de la función $y = \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ es

Seleccione una:

- $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
- $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
- $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

9

Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{cos(x) - 1}{sen(x)} \right)$$

Seleccione una:

- ∞
- 0
- 1
- -1

10

Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} \right)$$

Seleccione una:

- $+\infty$
- $\frac{1}{2}$
- 2
- e

11

Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen(x)}-\frac{1}{x}\right)$$

Seleccione una:

- 0
- -1
- 1
- $+\infty$

12

Al aplicar varias propiedades de logaritmos, se tiene que $\lim_{x\to 0}(1+tan(2x))^{\frac{4}{x}}$ es equivalente a

Seleccione una:

- $e^{\left(\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}(1+tan(2x))\right)}$
- $e^{\left(\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}\ln[1+tan(2x)]\right)}$
- $e^{\left(\lim_{x\to 0}\ln\left[\frac{4}{x}(1+tan(2x))\right]\right)}$
- $e^{\left(\lim_{x\to 0}(1+tan(2x))\ln\left[\frac{4}{x}\right]\right)}$

13

Considere la expresión $\lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot e^{-x}\right)$ así como proposiciones que aparecen a continuación para determinar lo que se le solicita:

1. El límite anterior posee la forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Para utilizar la Regla de L´Hôpital es necesario reescribir dicho límite de la forma

2a. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}}\right)$

2b. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{x}}\right)$

Al aplicar dicha Regla, el límite que se desea calcular se transforma en la expresión :

3a. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^{x}}\right)$

3b. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{x} - xe^{x}}{e^{2x}}\right)$

Finalmente, el resultado de este límite es 0.

14

Sea $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + x^2 - x - 5$.

El mínimo absoluto de f se alcanza en

Seleccione una:

- $x = -1$
- $x = -2$
- $x = 2$
- $x = \dfrac{1}{3}$

15

Sea $f : \left[\frac{-7}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + 3x^2$.

El mínimo absoluto de f se alcanza en

Seleccione una:

- $x = 0$
- $x = \frac{-7}{2}$
- $x = 2$
- $x = -2$

16

Hallar la ecuación de la asíntota oblicua (si la hay) a la gráfica de la función con criterio $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{x^3 - 1}$ definida en su dominio máximo.

Seleccione una:

- $y = x + 3$
- $y = x - 1$
- No hay
- $y = x + 2$

17

Considere una función f(x), bien definida en su dominio y que cumple con

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 2$

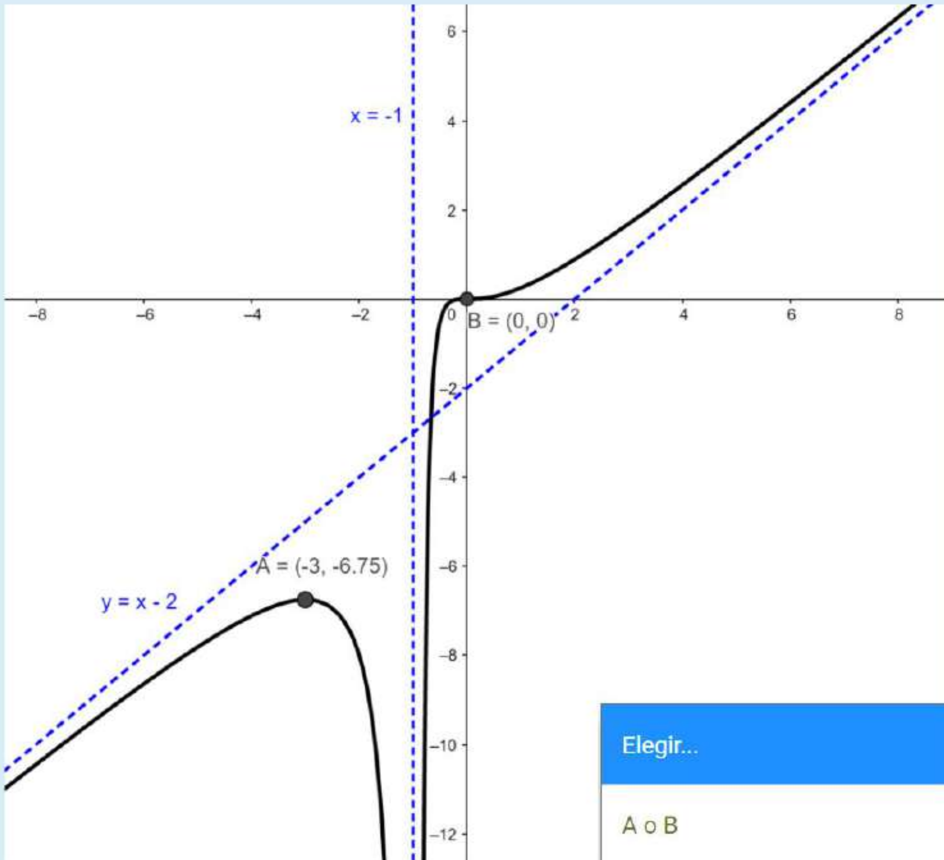
$\lim_{x \to 0} f(x) = 8$

Se puede afirmar que una asintota es:

Seleccione una:

- y = 4
- y = 8
- y = 2
- y = 0

Considere la gráfica de la función f tal que $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ y con base en ella, complete lo que se le solicita.



Un punto que satisface que $f'(x) = 0$ es

¿La gráfica de f posee un máximo local?

Un intervalo donde $f'(x)$ es positiva corresponde a

El punto que satisface que $f''(x) = 0$ es

Un intervalo donde f' y f'' son negativas corresponde a

Un intervalo donde $f'(x)$ es positiva y $f''(x)$ es negativa corresponde a

El valor de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ es

Un intervalo donde $f''(x)$ es positiva corresponde a

Elegir...

A o B

]-1,1[

]0,1[

no posee un máximo local

2

]-1,0[

1

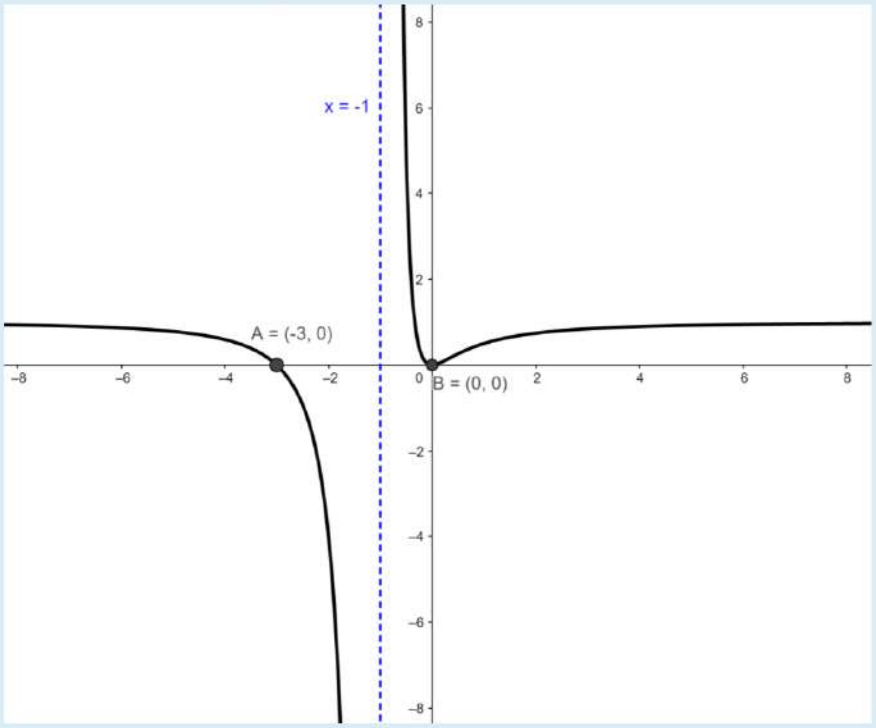
B

si posee un máximo local

]-3,-1[

19

Sea f una función continua con $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$, tal que la gráfica de su primer derivada, es decir, f' se muestra a continuación:



Considere las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de f es creciente en el intervalo]-6,-3[

II. La gráfica de f es decreciente en el intervalo]-4,-1[

Con certeza, ¿cuál o cuales de las proposiciones anteriores son verdaderas?

Seleccione una:

- Solo la I
- Ambas
- Solo la II
- Ninguna

20

Sea f una función continua con $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, tal que su primera y segunda derivada satisfacen la tabla de signos que se muestra a continuación:

	$-\infty$ 0	0 1	1 3	3 $+\infty$
f'	$-$	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	$+$	$-$	$+$

Considere las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de f es creciente en el intervalo]1,4[

II. La gráfica de f es decreciente en el intervalo]-4,0[

Con certeza, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

Seleccione una:

- Ambas
- Solo la I
- Solo la II
- Ninguna

21

Considere la función f de criterio $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$ definida en su dominio máximo y cuya primera derivada es $f'(x) = \dfrac{1-4x}{3x^{\frac{2}{3}}}$.

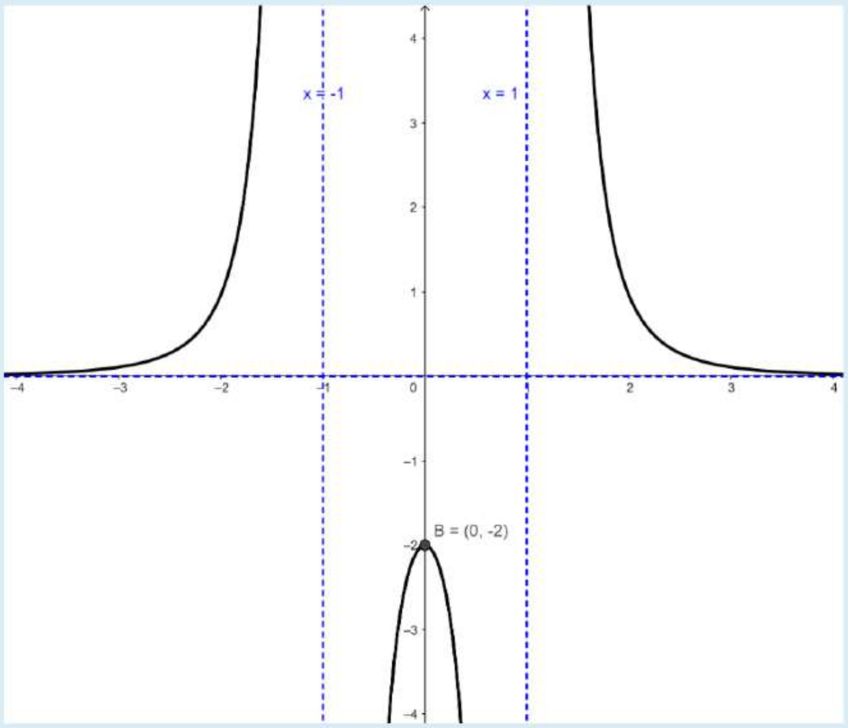
Entonces un punto crítico de f corresponde a

Seleccione una:

- $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$
- $(0,1)$
- $(0,0)$
- $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$

22

Sea f una función continua con $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, tal que la gráfica de su segunda derivada, es decir, f'' se muestra a continuación:



Considere las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo]1,2[

II. La gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo]-3,-1[

Con certeza, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

Seleccione una:

- Solo la I
- Ambas
- Ninguna
- Solo la II

23

Sea f una función continua con dominio $\mathbb{R} - \{1\}$, tal que su primera y segunda derivada satisfacen la tabla de signos que se muestra a continuación:

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
f'	$-$	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	$+$	$-$	$+$

Considere las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de f es cóncava en el intervalo]1,4[

II. La gráfica de f es convexa en el intervalo]-4,0[

Con certeza, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

Seleccione una:

- Ninguna
- Solo la II
- Solo la I
- Ambas

24

Considere la función f de criterio $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ definida en su dominio máximo y cuyas derivadas son $f'(x) = \dfrac{-(x+2)}{x^3}$ y . $f''(x) = \dfrac{2(x+3)}{x^4}$

Entonces un punto de inflexión de f corresponde a

Seleccione una:

- No hay
- $(-3, 0)$
- $\left(-3, \dfrac{-2}{9}\right)$
- $\left(-3, \dfrac{-1}{27}\right)$

25

Un productor de mango cuenta actualmente 25 árboles, que producen alrededor de 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

a) La producción actual de la huerta.

b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.

c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

SOLUCION

Analizando el problema y resolviendo se tiene que:

La pregunta (a) sobre la producción actual de la huerta es juntar todo lo que producen los árboles que se tiene, lo cual corresponde a

La pregunta (b) nos indica que x representa los árboles adicionales que se plantan, esta pregunta nos conduce a la expresión que representa la producción que se obtendría de cada árbol.

La pregunta (c) solicita la producción total de la finca lo cual corresponde a la función de producción que es

La pregunta (d) solicita maximizar la producción, la aplicación matemática que nos permite maximizar nos lleva a plantear la ecuación

Aplicando esta teoría al problema en que nos encontramos se tiene la ecuación

Resolviendo la ecuación anterior la respuesta es

Se maximiza la producción cuando la cantidad actual de árboles

26

Los lados de un rectángulo cumplen que el largo es el doble del ancho. Si el largo aumenta a una razón de $1\ cm/s$, halle la razón de cambio del área cuando el largo del rectángulo mide $12cm$, interprete el resultado e indique las unidades de medida. (7 puntos)

Para responder la sección de **desarrollo** debe seguir las siguientes indicaciones:

a) Contestar en hojas la pregunta en forma clara, ordenada, **a mano**, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. En cada página debe indicar su nombre y apellidos así como el código de estudiante que se le asignó en el proyecto.

b) Incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta.

c) Digitalizar la solución del ejercicio de modo que el procedimiento aparezca en un solo archivo pdf (solamente se aceptará ese formato). Para lograr esto se puede utilizar fotos, escanear o incluso aplicaciones de celular que convierten imágenes a formato pdf. Debe asegurarse de que el archivo sea legible y claro.

d) Nombrar el archivo con la información de número de código de estudiante (otorgado por el proyecto MATEM), nombre y Colegio, como se muestra en el siguiente ejemplo: "12345678.FernandoAguilar.ColegioX"

e) Subir el archivo pdf en el espacio indicado en el examen (debe verificar que está adjuntado el archivo correcto).

Tamaño máximo para archivos nuevos: 512MB, anexos máximos: 2

Archivos

Arrastre y suelte los archivos aquí para subirlos

Tipos de archivo aceptados

Archivos de documento *.doc .docx .epub .gdoc .odt .oth .ott .pdf .rtf*

Documento PDF *.pdf*

SOLUCIONARIO

1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2}{y^2}$

2) -48

3) $Ambas$

4) $g\acute{}(x) = \frac{4}{x}$

5) $\left(-3x^2 sen(x^3)\ln(3x) + \frac{cos(x^3)}{x}\right)$

6)

Para facilitar el cálculo de la derivada se pueden utilizar propiedades de los logaritmos, por lo que la ecuación anterior quedaría reescrita como:

I. $y = \frac{3}{4}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$ Falso

II. $\ln(y) = \frac{3}{4}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$ Verdadero

De esta forma se puede asegurar que :

III. $y' = \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ Verdadero

IV. $y' = \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$ Falso

7) $y\acute{} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

8) $\frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

9) 0

10) $+\infty$

11) 0

12) $e^{\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{4}{x} ln[1+\tan(2x)]\right)}$

13)

Para utilizar la Regla de L´Hôpital es necesario reescribir dicho límite de la forma

2a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right)$ Falso

2b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}\right)$ Verdadero

Al aplicar dicha Regla, el límite que se desea calcular se transforma en la expresión :

3a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x}}\right)$ Verdadero

3b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}\right)$ Falso

14) $x = -2$

15) $x = \frac{-7}{2}$

16) $y = x + 3$

17) $y = 4$

18)

Un punto que satisface que $f'(x) = 0$ es	A o B
¿La gráfica de f posee un máximo local?	si posee un máximo local
Un intervalo donde $f'(x)$ es positiva corresponde a	]-1,1[
El punto que satisface que $f''(x) = 0$ es	B
Un intervalo donde f' y f'' son negativas corresponde a	]-3,-1[
Un intervalo donde $f'(x)$ es positiva y $f''(x)$ es negativa corresponde a	]-1,0[
El valor de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ es	1
Un intervalo donde $f''(x)$ es positiva corresponde a	]0,1[

19) $Solo\ la\ I$

20) $Ambas$

21) $(0,0)$

22) $Solo\ la\ II$

23) $Solo\ la\ II$

24) $\left(-3, -\frac{2}{9}\right)$

25)

SOLUCION

Analizando el problema y resolviendo se tiene que:

La pregunta (a) sobre la producción actual de la huerta es juntar todo lo que producen los árboles que se tiene, lo cual corresponde a 600*25

La pregunta (b) nos indica que x representa los árboles adicionales que se plantan, esta pregunta nos conduce a la expresión 600-15x que representa la producción que se obtendría de cada árbol.

La pregunta (c) solicita la producción total de la finca lo cual corresponde a la función de producción que es P(x)=(25+x)*(600-15x)

La pregunta (d) solicita maximizar la producción, la aplicación matemática que nos permite maximizar nos lleva a plantear la ecuación P´(x)=0

Aplicando esta teoría al problema en que nos encontramos se tiene la ecuación

-30x+225=0

Resolviendo la ecuación anterior la respuesta es

Se maximiza la producción cuando la cantidad actual de árboles se le aumenta 7 u 8 árboles

26)

Los lados de un rectángulo cumplen que el largo es el doble del ancho. Si el largo aumenta a una razón de $1\,cm/s$, halle la razón de cambio del área cuando el largo del rectángulo mide $12\,cm$, interprete el resultado e indique las unidades de medida. (7 puntos)

Datos: (2 puntos)
No todos los datos son necesarios.

$$l = 2a \qquad \frac{dl}{dt} = 1 \text{ cm/s} \qquad l = 12$$

$$\frac{l}{2} = a \qquad \frac{da}{dt} = \frac{\frac{dl}{dt}}{2} = \frac{1}{2} \text{ cm/s} \qquad a = 6$$

Procedimiento: (4 puntos)
Para estos puntos se considera 3 procedimientos distintos cuyos puntos se distribuyen de la siguiente manera: la fórmula del área (1 pto), si reescriben o no la función área en términos de una sola varible (1 pto si hay reescritura, 0 en caso contrario), las derivadas de las variables área , largo y/o ancho (1 pto si hay reescritura, 2 en caso contrario), evaluar para obtener el valor de $\frac{dA}{dt}$ (1 pto).

	$A = l \cdot a$	
$A = \frac{l^2}{2}$	$A = 2a^2$	
$\frac{dA}{dt} = \frac{2l}{2} \cdot \frac{dl}{dt}$	$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 2a \cdot \frac{da}{dt}$	$\frac{dA}{dt} = \frac{dl}{dt} \cdot a + l \cdot \frac{da}{dt}$
$\frac{dA}{dt} = 12 \cdot 1$	$\frac{dA}{dt} = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{dA}{dt} = 1 \cdot 6 + 12 \cdot \frac{1}{2}$
	$\frac{dA}{dt} = 12$	

Interpretación del resultado (incluye unidades de medida): (1 puntos)
El área aumenta a una razón de 12 cm^2/s.