Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2010

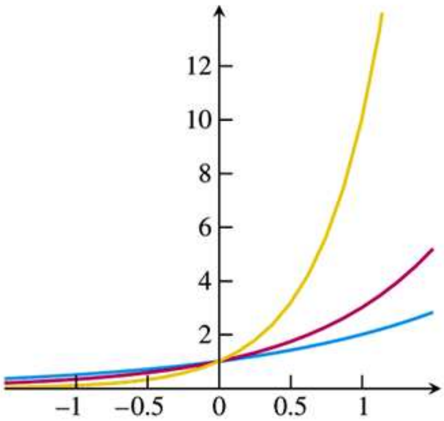
http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
-Décimo Año-

III EXAMEN PARCIAL 2010

Nombre: ________________________________ código: _______

Colegio: ____



Fórmula

1

Sábado 2 de octubre de 2010

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.

3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección y está constituida por 34 ítems, la segunda es de complete y la conforman 6 ítems, y la tercera es de desarrollo y la conforman 2 ítems.

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 34 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

Función exponencial y logarítmica

1. El ámbito de la función $f:]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = -5^x - 3$ es

(A) $[-4, -3[$

(B) $]-\infty, -4]$

(C) $]-\infty, -3[$

(D) $]-4, 0]$

2. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1$ y analice las siguientes afirmaciones:

I. f es creciente

II. El rango de f es $]-\infty, -1[$

III. La gráfica de f interseca al eje x

De ellas, son verdaderas

(A) sólo la I y la II.

(B) sólo la I y la III.

(C) sólo la II.

(D) sólo la III.

3. El ámbito de la función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=2^{-x}$ es

(A) $]-\infty,0[$

(B) $]0,+\infty[$

(C) $\{1,2,4,8,16,...\}$

(D) $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},...\right\}$

4. Sea $f:\mathbb{R}\to]-2,+\infty[$ la función definida por $f(x)=2^{3x-1}-2$, entonces $f^{-1}(x)$ es igual a

(A) $\frac{1}{3}\log_2(x+2)+1$

(B) $\frac{1}{3}\log(x+2)+\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1+\log_2(x+2)}{3}$

(D) $\frac{1}{3}+\ln\sqrt[3]{x+2}$

5. El ámbito de la función $f:\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)$ es

(A) $]-\infty,0]$

(B) $[0,+\infty[$

(C) $]-\infty,0[$

(D) $]0,+\infty[$

6. Considere la función $f:\left]0,+\infty\right[\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{\frac{3}{5}} x$ y analice las siguientes proposiciones:

I) $f(2010)>f(2011)$

II) Si $x\in\left]0,1\right[$ entonces $f(x)<0$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I
(B) Sólo la II
(C) Ambas
(D) Ninguna

7. Considere la función $f:\left]0,+\infty\right[\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\log_{\frac{2}{3}} x$. Un número mayor que 1 corresponde a

(A) $f\left(\frac{4}{3}\right)$

(B) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

(C) $f\left(\frac{2}{3}\right)$

(D) $f(1)$

8. Sea $g:\left]b,+\infty\right[\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=\log_b(x-b)$. Si $g(3b)=0$ entonces g es una función

(A) positiva.
(B) creciente.
(C) constante.
(D) decreciente.

9. La expresión $\dfrac{\ln 3+\ln 27}{\ln 27-\ln 9}$ es igual a

(A) 2

(B) 4

(C) 27

(D) 81

10. La expresión $81^{\log_3 \sqrt{2}}$ es equivalente a

(A) $4\sqrt{2}$

(B) 9

(C) 2

(D) 4

11. Si x es un número mayor que 1, una expresión equivalente a

$\dfrac{1}{2}\log\left(x^2+4x+4\right)-\log\left(x^2+3x+2\right)+\dfrac{1}{2}\log\left(x^2-2x+1\right)$ es

(A) $\log\left(x-1\right)-\log\left(x+1\right)$

(B) $\log\left(x^2-3x+2\right)$

(C) $\log\left(x^2-1\right)$

(D) 0

12. La expresión $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{3}$ es igual a

(A) -8

(B) $-\dfrac{1}{4}$

(C) $-\dfrac{1}{8}$

(D) $\dfrac{1}{8}$

13. La expresión $\dfrac{\log_7 11}{\log_{49} 11}$ es igual a

(A) 2

(B) $\ln 7$

(C) $\dfrac{1}{2}$

(D) $\log 7$

14. La expresión $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}\log 4 - 2\log x\right)$ es equivalente a

(A) $\log\left(\dfrac{\sqrt[5]{2}}{x}\right)$

(B) $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt[5]{2}}\right)$

(C) $x\sqrt[5]{2}$

(D) $\log\left(x^5\sqrt{2}\right)$

15. La solución de la ecuación $125^{x-4}\cdot 25^{3+x}=(0,2)^{4-3x}$ es

(A) $\frac{5}{3}$

(B) -1

(C) -2

(D) 1

16. La solución de la ecuación $5^{x-2}=3^{x+2}$ es

(A) $\ln(225)-\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

(B) $\ln 5-\ln 3$

(C) $\frac{2\ln 3+2\ln 5}{\ln 3-\ln 5}$

(D) $\frac{2\ln 3+2\ln 5}{\ln 5-\ln 3}$

17. La cantidad de elementos del conjunto solución de la ecuación $64^{x}-8^{x+1}-9=0$ es

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

18. *Si se colocan 80 mg de un material radioactivo en un reactor nuclear, la cantidad N de miligramos presente después de t años, debido a la desintegración, está dada por* $N(t) = 80 \cdot 2^{-0,5 \cdot t}$. Para que la cantidad restante del material radiactivo sea de 10 mg deben transcurrir

(A) 1,5 años

(B) 2,5 años

(C) 12 años

(D) 6 años

19. Bajo ciertas condiciones la presión atmosférica *p*, en pulgadas de mercurio, a una altura de ***h*** pies está dada por $p(h) = 29e^{-0,000034h}$. Si la presión es de 14,5 entonces la altura debe ser

(A) $29e^{-0,000493}$

(B) $\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{0,000034}$

(C) $\dfrac{\ln 2}{0,000034}$

(D) 0,000034 ln2

20. El grado de acidez o pH de una sustancia se define como **pH = – log [H⁺],** donde [H⁺] es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). Si en una lluvia ácida, medida en Escocia en 1974, la concentración de iones de hidrógeno era de aproximadamente $(1000)^{\frac{-4}{5}}$ M, entonces su pH era de

(A) -2,4

(B) 2,4

(C) 3,6

(D) 0,8

21. El conjunto solución de $x > \log_3 x$ corresponde a

(A) $\mathbb{R}$

(B) $\varnothing$

(C) $]0, +\infty[$

(D) $]-\infty, 0[$

22. El conjunto solución de $\log_{0,5}(2x-3) > \log_{0,5}(x+1)$ es

(A) $\varnothing$

(B) $]-1, 4[$

(C) $]-\infty, 4[$

(D) $\left]\frac{3}{2}, 4\right[$

Geometría

23. ¿Cuál es el número de lados de un polígono regular que tiene 20 diagonales en total?

(A) 18

(B) 10

(C) 8

(D) 5

24. Si la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono regular es igual a 1800°, entonces cada ángulo externo mide

(A) 80º

(B) 60º

(C) 45º

(D) 30º

25. Si el área de un sector circular determinado por un ángulo de 60º es 2π entonces, ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?

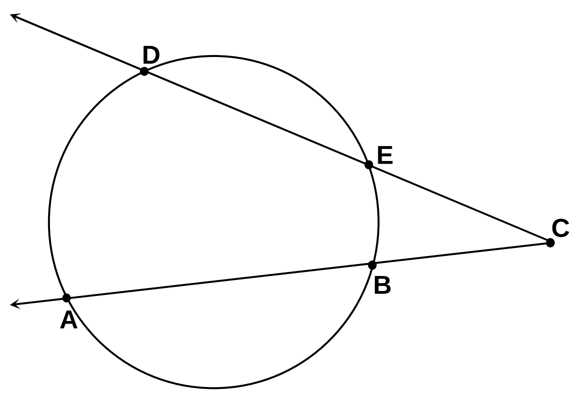
(A) $2\pi\sqrt{6}$

(B) $4\pi\sqrt{3}$

(C) 12π

(D) 24π

26. Si en la figura adjunta, $\overline{AB}$ mide $9\ cm$, $\overline{BC}$ mide $7\ cm$ y $\overline{ED}$ mide $6\ cm$ entonces $\overline{EC}$ mide



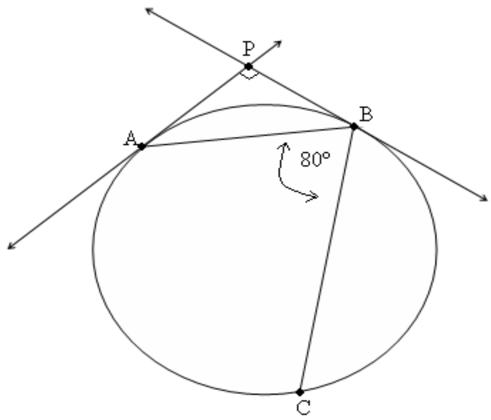
(A) $8\ cm$

(B) $10{,}5\ cm$

(C) $4\ cm$

(D) $18{,}66\ cm$

27. De acuerdo con los datos de la figura, si $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ son tangentes a la circunferencia en A y B respectivamente, entonces $m\overset{\frown}{BC}$ es



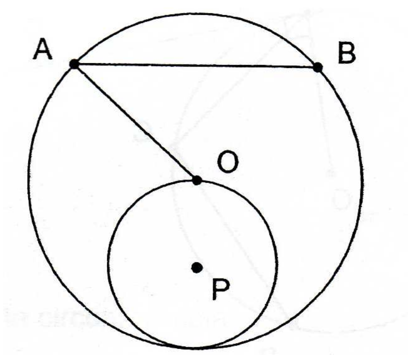
(A) 40º

(B) 100º

(C) 110º

(D) 160º

28. Considere la siguiente figura



De acuerdo con los datos de la figura, si las circunferencias de centros O y P son tangentes interiormente, $m\measuredangle BAO = 30º$ y $AB = 20$, entonces la medida de $\overline{OP}$ es

(A) 10

(B) 20

(C) $10\sqrt{3}$

(D) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

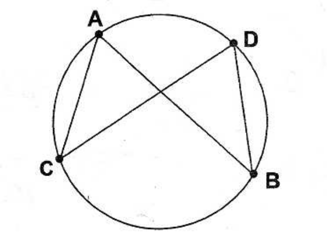
29. De acuerdo con los datos de la circunferencia , si $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, $m\widehat{AC} = 80^{o}$ y $m\widehat{ADB} = 150^{o}$ entonces la medida del $\measuredangle ABD$ es

(A) 35^{o}

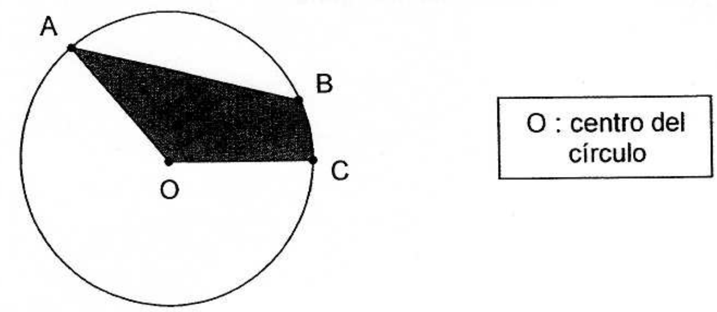
(B) 40^{o}

(C) 70^{o}

(D) 75^{o}



30. Considere la siguiente figura



De acuerdo con los datos de la figura, si $OC = 4$, $m\measuredangle AOB = 120^{o}$ y $m\measuredangle AOC = 150^{o}$, entonces el área de la región destacada con gris es

(A) $\dfrac{4\pi}{3} + 8$

(B) $\dfrac{20\pi}{3} - 8$

(C) $\dfrac{4\pi}{3} + 4\sqrt{3}$

(D) $\dfrac{20\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

31. Si A y B son dos puntos de una circunferencia de 20cm de diámetro y centro P, tales que la cuerda $\overline{AB}$ mide 16cm entonces la distancia de P a dicha cuerda es

(A) $3\ cm$

(B) $6\ cm$

(C) $12\ cm$

(D) $\sqrt{336}\ cm$

32. Si la medida del lado de un hexágono regular inscrito en una circunferencia es de $9\ cm$, entonces la medida del lado del hexágono regular circunscrito a la misma circunferencia es igual a

(A) $6\sqrt{3}\ cm$

(B) $3\sqrt{3}\ cm$

(C) $12\ cm$

(D) $6\ cm$

33. El área total de un cilindro de altura 10 cm y volumen $250\pi\ cm^3$ es

(A) $150\pi\ cm^2$

(B) $125\pi\ cm^2$

(C) $25\pi\ cm^2$

(D) $35\pi\ cm^2$

34. El radio r de un cono recto es igual a su altura, entonces el área total del cono es igual a

(A) $\pi r^2\left(2+\sqrt{3}\right)$

(B) $\pi r^2\left(2+\sqrt{2}\right)$

(C) $\pi r^2\left(1+\sqrt{3}\right)$

(D) $\pi r^2\left(1+\sqrt{2}\right)$

-fin-

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
PROYECTO MATEM - 2010
MA-0125 Matemática Elemental – Décimo Año

TERCER EXAMEN PARCIAL - Sábado 2 de octubre

Nombre completo: ________________________________ CÓDIGO: __________

COLEGIO: ____

PREGUNTA	Puntos obtenidos
Complete	
Desarrollo 1	
Desarrollo 2	
TOTAL	

SEGUNDA PARTE. COMPLETE **(Valor 6 puntos)**

Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita, de manera que se obtenga una proposición correcta. Un punto cada respuesta correcta.

a) La altura de un prisma hexagonal recto mide $10\ cm$ y la apotema de la base mide $2\ cm$, entonces el volumen del prisma es igual a ________________.

b) El volumen de un cubo es $8\ cm^3$, entonces la diagonal de dicho cubo mide ________________.

c) El área de una esfera cuyo volumen es $4\pi\ cm^3$ es igual a ________________.

d) La apotema de un triángulo equilátero mide $7\ cm$. Entonces, el área de dicho triángulo es igual a ________________.

e) Si la longitud de la circunferencia circunscrita a un cuadrado es $12\ \pi$, entonces la longitud de la apotema de dicho cuadrado es igual a ___________________.

f) Si la apotema de un hexágono regular mide $\frac{5}{2}\sqrt{3}\ cm$, entonces la medida de cada lado es igual a ________________.

TERCERA PARTE. DESARROLLO **(Valor 9 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x+4}\cdot\left(\frac{25}{49}\right)^{x-1} < \left(\frac{7}{5}\right)^{-3}$$ (4 puntos)

2. Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$\log_7(3x-5)+\log_7(2x+1)=\log_7(6x^2-24x)-\log_7(3x)$ (5 puntos)

-fin–

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
PROYECTO MATEM - 2010
MA-0125 Matemática Elemental – Décimo Año

MATEM Matemática para la Enseñanza Media

Solucionario

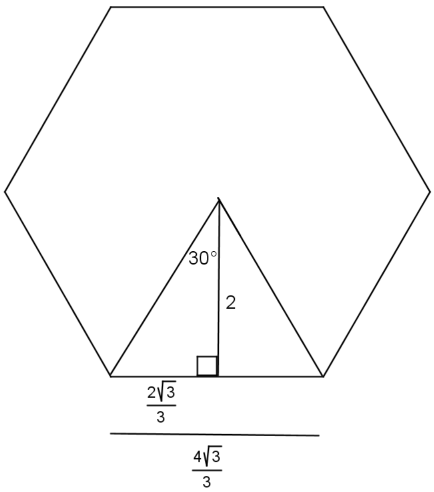
TERCER EXAMEN PARCIAL - Sábado 2 de octubre

SEGUNDA PARTE. COMPLETE **(Valor 6 puntos)**

Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita, de manera que se obtenga una proposición correcta. Un punto cada respuesta correcta.

a) La altura de un prisma hexagonal recto mide 10 cm y la apotema de la base mide 2 cm, entonces el volumen del prisma es igual a $80\sqrt{3}\ cm^3$.

Si la apotema de la base mide $2\,cm$, entonces cada lado de la base mide $\frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm$. Así, el área de cada uno de los 6 triángulos congruentes en que se divide el hexágono (base del prisma) es igual a



$$A_T = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{16}{3}\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Por lo tanto el área del hexágono es

$$A_H = 6A_T = 6 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Así, el volumen del prisma es igual a

$$V_P = A_B \cdot h = 8\sqrt{3} \cdot 10 = 80\sqrt{3}$$

b) El volumen de un cubo es $8\,cm^3$, entonces la diagonal de dicho cubo mide $2\sqrt{3}\ cm$.

Solución:

Si a es la medida del lado del cuadrado, entonces $a^3 = 8$ por lo que $a = 2$. Luego, la medida de la diagonal es $d = a\sqrt{3} = 2\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

c) El área de una esfera cuyo volumen es $4\pi\ cm^3$ es igual a $4\sqrt[3]{9}\pi\ cm^2$.

Solución:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi$$

$$\Rightarrow r^3 = 3$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{3}$$

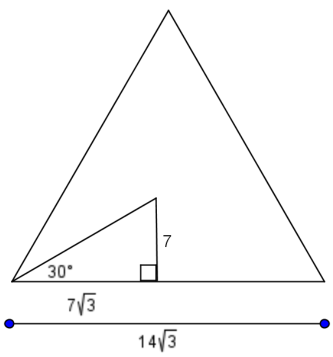
Entonces, el área de la esfera es igual a $A = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = 4\sqrt[3]{9}\pi$

d) La apotema de un triángulo equilátero mide $7\ cm$. Entonces, el área de dicho triángulo es igual a $147\sqrt{3}\ cm^2$.

Solución:

Si la apotema del triángulo mide $7\ cm$, entonces cada lado mide $14\sqrt{3}\ cm$. Por lo tanto el área del triángulo es igual a

$$A = \frac{\left(14\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{588\sqrt{3}}{4} = 147\sqrt{3}$$

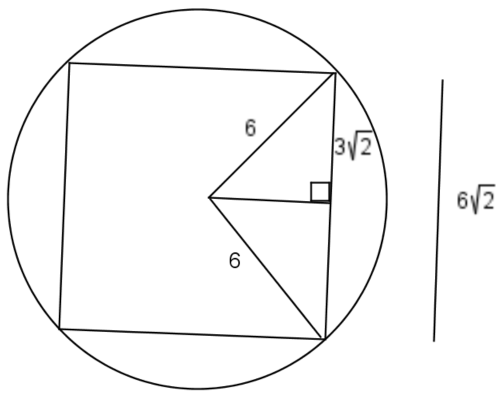


e) Si la longitud de la circunferencia circunscrita a un cuadrado es $12\ \pi$, entonces la longitud de la apotema de dicho cuadrado es igual a $3\sqrt{2}$.

Solución:

Como $12\ \pi$ es la longitud de la circunferencia se tiene que
$C = 12\ \pi = 2\pi r$
$\Rightarrow r = 6$

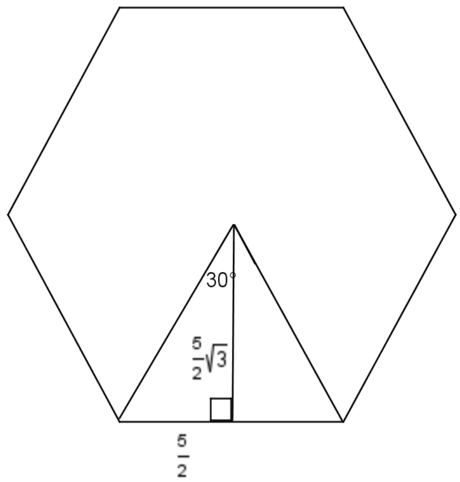
Entonces la apotema mide $3\sqrt{2}$



f) Si la apotema de un hexágono regular mide $\frac{5}{2}\sqrt{3}\ cm$, entonces la medida de cada lado es igual a $5\ cm$.

Solución:

Como se observa en la figura, si la apotema del hexágono mide $\frac{5}{2}\sqrt{3}\ cm$, por las propiedades del triángulo especial 30°- 60° se tiene que la medida de cada lado del hexágono mide $5\ cm$.



PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 34 puntos)**

1	A		8	D		15	D		22	D		29	A	
2	D		9	B		16	D		23	C		30	C	
3	D		10	D		17	B		24	D		31	B	
4	C		11	A		18	D		25	B		32	A	
5	B		12	C		19	C		26	A		33	A	
6	A		13	A		20	B		27	C		34	D	
7	B		14	A		21	C		28	D				

TERCERA PARTE. DESARROLLO **(Valor 9 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

3. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x+4}\cdot\left(\frac{25}{49}\right)^{x-1} < \left(\frac{7}{5}\right)^{-3}$$ (4 puntos)

Solución:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x+4}\cdot\left(\frac{25}{49}\right)^{x-1} < \left(\frac{7}{5}\right)^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{x+4}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{2(x-1)} < \left(\frac{5}{7}\right)^{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{x+4+2(x-1)} < \left(\frac{5}{7}\right)^{3}$$

$\Leftrightarrow x+4+2(x-1)>3$ Dado que ambos términos de la desigualdad son positivos y que $f(x)=\left(\frac{5}{7}\right)^{x}$ es una función decreciente.

$$\Leftrightarrow 3x+2>3$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$$

Por lo tanto el conjunto solución $S=\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

4. Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$\log_7(3x-5)+\log_7(2x+1)=\log_7(6x^2-24x)-\log_7(3x)$ (5 puntos)

Solución:

A. Se determina el dominio en el cual se trabaja. Se debe cumplir que los cuatro argumentos sean números positivos.

- $3x-5>0 \iff x>\dfrac{5}{3}$
- $2x+1>0 \iff x>\dfrac{-1}{2}$
- $6x(x-4)>0 \iff x<0$ o $x>4$
- $3x>0 \iff x>0$

Por lo tanto el dominio es $]4,+\infty[$

B. $\log_7(3x-5)+\log_7(2x+1)=\log_7(6x^2-24x)-\log_7(3x)$

$\Rightarrow \log_7\left[(3x-5)(2x+1)\right]=\log_7\left(\dfrac{6x^2-24x}{3x}\right)$ (Note que por el dominio $x\neq 0$)

$\Rightarrow (2x+1)(3x-5)=\left(\dfrac{6x^2-24x}{3x}\right)$

$\Rightarrow (2x+1)(3x-5)=\dfrac{3x(2x-8)}{3x}$

$\Rightarrow 6x^2-7x-5=2x-8$

$\Rightarrow 6x^2-9x+3=0$

$\Rightarrow 3(2x^2-3x+1)=0$

$\Rightarrow 3(2x-1)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ o $x=1$

Note que ninguna de estas soluciones de la ecuación polinomial pertenecen al dominio. Por lo tanto el conjunto solución es $S=\varnothing$.