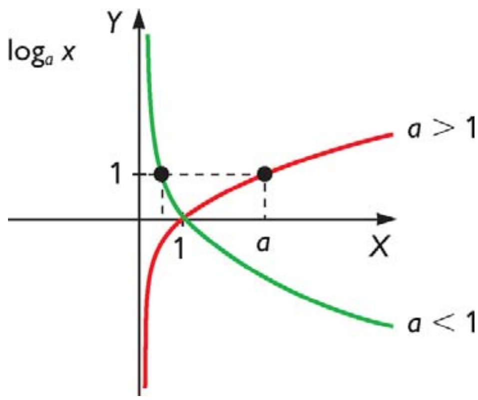
Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
-Décimo Año-

III EXAMEN PARCIAL 2009



Fórmula

1

Sábado 10 de octubre de 2009

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección y está constituida por 37 ítems y la segunda es de desarrollo y la conforman 3 ítems.

4. La parte de selección debe ser contestada en las hojas de respuestas que se le darán para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **solo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra. Si esta parte del **examen contiene** partes escritas con **lápiz** usted **pierde el derecho a reclamar**.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 37 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, solo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

Función exponencial y logarítmica

1. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2^{-x}+1$ y los siguientes pares ordenados:

I) $(0,1)$

II) $(-2,-3)$

¿Cuál (es) de los pares ordenados anteriores pertenecen al gráfico de la función f ?

(A) Ambos.

(B) Ninguno.

(C) Solo el I.

(D) Solo el II.

2. Considere la siguientes funciones

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \text{con } f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \text{con } g(x)=2^x$$

Con base en las funciones anteriores analice las siguientes proposiciones

I) $f(2009)<f(2010)$

II) $g(-2)<f(-2)$

¿Cuáles de las de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Ambas

(B) Ninguna

(C) Solo la I

(D) Solo la II

3. El ámbito de la función $f: \left]-2,+\infty\right[\to \mathbb{R}$ con $f(x) = 2^{-x} - 3$ es

(A) $\left]4,+\infty\right[$

(B) $\left]-3,1\right[$

(C) $\left]-3,+\infty\right[$

(D) $\left]-\infty,-3\right[$

4. El conjunto solución de la ecuación $5^{9x+1} = \dfrac{1}{5^4}$ corresponde a

(A) $S = \left\{\dfrac{5}{9}\right\}$

(B) $S = \left\{-\dfrac{5}{9}\right\}$

(C) $S = \left\{-\dfrac{1}{9}\right\}$

(D) $S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

5. La ecuación $25^x + 5^x - 2 = 0$ tiene la siguiente cantidad de soluciones

(A) Cero

(B) Una

(C) Dos

(D) Tres

6. El conjunto solución de la ecuación $e^{2\ln x} - 8 = 1$ corresponde a

(A) $\{-3,3\}$

(B) $\{\ln 3\}$

(C) $\{9\}$

(D) $\{3\}$

7. La ley de Lambert y Beer dice que la energía luminosa I que penetra hasta una profundidad de x metros en agua de mar, es $I = I_0 \cdot c^x$, en donde $0 < c < 1$ y se tiene que I_o es la intensidad o energía de la luz en la superficie. Si la fotosíntesis se efectúa para $c = \dfrac{1}{10}$ cuando $I = 0,01 \cdot I_0$, entonces la fotosíntesis se realiza a la siguiente profundidad

(A) 1 metro

(B) 4 metros

(C) 2 metros

(D) 0,5 metros

8. El dominio máximo de una función cuyo criterio es $f(x) = \ln(-x+2) + \log_2(x+7)$ corresponde a

(A) $]-7, 2[$

(B) $]-7, +\infty[$

(C) $]2, +\infty[$

(D) $]-\infty, 2[$

9. Considere $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ con $f\left(x\right)=\log_{0,3}x$

y analice las siguientes proposiciones:

I) $f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{1}{4}\right)$

II) Si $0<x<1$ entonces $f\left(x\right)$ es positivo

¿Cuál de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Ambas

(B) Ninguna

(C) Solo I

(D) Solo II

10. Si $f:\mathbb{R}\to\left]-3,+\infty\right[$, $f\left(x\right)=2^{x+1}-3$ entonces $f^{-1}\left(x\right)$ igual a

(A) $\log_{2}\left(x+3\right)-1$

(B) $\log_{2}\left(x-1\right)+3$

(C) $\log_{2}\left(x-3\right)+1$

(D) $\log_{2}\left(x+1\right)-3$

11. El conjunto solución de $2^{x}=3^{x-1}$ corresponde a

(A) $\left\{\frac{-\ln 3}{\ln 2-1}\right\}$

(B) $\left\{\frac{1}{\ln 2}\right\}$

(C) $\left\{\frac{-\ln 3}{\ln 2-\ln 3}\right\}$

(D) $\varnothing$

12. Si $\log_5 a = x$ y $\log_5 b = y$ entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)\cdot 5^x$ es igual a

(A) 5^{x-y}

(B) $\dfrac{x^2}{y}$

(C) 5^{2x-y}

(D) 5^{2x+y}

13. El valor de x en la expresión $\log_x \sqrt[5]{12} = \dfrac{-1}{5}$ corresponde a

(A) $\dfrac{1}{12}$

(B) $\dfrac{-1}{12}$

(C) -12

(D) 12

14. Si $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \log_p x$ y $f(x) < 0$ para $x > 1$, con certeza se cumple que

(A) $-1 < p < 0$

(B) $0 < p < 1$

(C) $1 < p$

(D) $p < 0$

15. La solución de la ecuación $\log_2 x = 3 - \log_2(x+2)$ es un número real entre

(A) 0 y $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{2}$ y 1.

(C) $\frac{3}{2}$ y 2.

(D) 1 y $\frac{5}{2}$.

16. La expresión $\log_a \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{\log_3 81}$ es equivalente a

(A) 4

(B) 3

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{5}{2}$

Para responder los ítemes 17 y 18 puede utilizar que

$$\ln 2 \approx 0,6931 \qquad \ln 3 \approx 1,0986 \qquad \ln 7 \approx 1,9459 \qquad \ln 11 \approx 2,3979$$

17. La expresión $\log_7 3$ es aproximadamente

(A) $0,5646$

(B) $1,7712$

(C) $2,6391$

(D) $-1,2528$

18. La expresión $\ln\sqrt[5]{121}$ es aproximadamente

(A) $5,9948$

(B) $1,1498$

(C) $0,9592$

(D) $0,4795$

19. De acuerdo con la Escala de Richter, la magnitud R, en grados, de un terremoto de intensidad I puede encontrarse por medio de la función $R=\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ donde I_0 es cierta intensidad mínima.

Con base en la información anterior, la magnitud R de un terremoto que tiene una intensidad de 10 000 veces la de I_0 es

(A) 3 grados

(B) 4 grados

(C) 5 grados

(D) 6 grados

Trigonometría

20. Al número real $\dfrac{25\pi}{3}$ le corresponde el punto de la circunferencia trigonométrica cuyas coordenadas son

(A) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(B) $\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

(C) $\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(D) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

21. Si el punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real α pertenece a la recta que contiene al origen y pasa por el punto $(-3,6)$ entonces $sen\ \alpha$ es igual a

(A) $\dfrac{-6}{3}$

(B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(C) $\dfrac{-1}{2}$

(D) $\dfrac{-3\sqrt{45}}{45}$

22. El punto de coordenadas $(\cos(3), sen(3))$ se ubica en el siguiente cuadrante

(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

23. El valor de $\tan\left(\dfrac{17\pi}{6}\right)$ es igual a

(A) $-\sqrt{3}$

(B) $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$

(C) $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

(D) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

24. Si $\tan(\alpha) = -\frac{5}{3}$ y $\cos\alpha < 0$ entonces *sen* α es igual a

(A) $\frac{-5}{3}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{5\sqrt{34}}{34}$

(D) $\frac{-3\sqrt{34}}{34}$

25. Sea $f : \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, $f(x) = sen x$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones sobre la gráfica de f es verdadera?

(A) es sobreyectiva

(B) corta al eje y

(C) corta al eje x

(D) es creciente

26. Un intervalo en el que la función f dada por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ es estrictamente creciente corresponde a

(A) $]0, \pi[$

(B) $]\pi, 2\pi[$

(C) $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

(D) $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

27. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=sen(x)+\cos(x)$ un punto donde la grafica de f interseca al eje x es

(A) $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$

(B) $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$

(C) $(\pi,0)$

(D) $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

28. El periodo de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2sen\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$ es

(A) 4π

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) π

29. La amplitud de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3sen\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ es

(A) 2π

(B) 1

(C) 3

(D) $\frac{\pi}{6}$

30. El rango de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4sen(3x-\pi)+2$ corresponde a

(A) $\mathbb{R}$

(B) $[-1,1]$

(C) $[-4,4]$

(D) $[-2,6]$

31. La expresión $arcsen\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ es igual a

(A) $\frac{2\pi}{3}$

(B) $\frac{-\pi}{3}$

(C) $\frac{5\pi}{6}$

(D) $\frac{-\pi}{6}$

32. La expresión $\text{sen}\left[4\arctan(1)\right]$ es igual a

(A) 1

(B) π

(C) 0

(D) -1

33. La expresión $\dfrac{1+\cos^2 x - sen^2 x}{sen(2x)\cdot \cos x}$ es equivalente a

(A) $sen\ x$

(B) $\csc x$

(C) $\sec x$

(D) $\cos x$

34. La expresión $\dfrac{1+\cos(2x)}{\cot(x)}$ es equivalente a

(A) $sen(2x)$

(B) $sen(x)\cdot \cos(x)$

(C) $2sen^3(x)\cdot \cos(x)$

(D) $2\cos^3(x)\cdot sen(x)$

35. Considere las siguientes igualdades

I. $sen40 = 2sen20$

II. $\cos^2 10 - sen^2 10 = \cos 20$

III. $sen(a+2) = sena\cos 2 + sen2\cos a$

De ellas son verdaderas

(A) La I y la II

(B) La I y la III

(C) La II y la III

(D) Todas

36. Si $t \in [0, 2\pi[$ entonces el conjunto solución de $-2sent + \sqrt{3} = 0$ es

(A) $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

(B) $\left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$

(C) $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$

(D) $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

37. La ecuación $2\cos^2 x - \cos x = 0$ tiene la siguiente cantidad de soluciones en $\left[\frac{-3\pi}{2}, 0 \right]$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
PROYECTO MATEM - 2009
MA-0125 Matemática Elemental – Décimo Año

TERCER EXAMEN PARCIAL - Sábado 10 de octubre

Nombre completo: ___________________________________ CÓDIGO:

COLEGIO: ____

PREGUNTA	Puntos obtenidos
1	
2	
3	
TOTAL	

SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor 17 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

A. (5 puntos) Determine (en $\mathbb{R}$) el conjunto solución de la ecuación

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(-4x+60\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)-\log_{\frac{1}{2}}(6x-5)=-2$$

B. (6 puntos) Determine (en $\mathbb{R}$) el conjunto solución de la ecuación

$$7-3\cdot sen^2 x-2\sqrt{3}\cdot\cos x=3+sen^2 x$$

C. (6 puntos) Si α y β son números reales tales que

- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
- $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$
- $\cos^2 \beta = \frac{64}{289}$
- $sen^2\alpha = \frac{25}{169}$

Usando lo anterior, calcule:

a) $sen(2\alpha)$

b) $\tan \beta$

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
PROYECTO MATEM - 2009
MA-0125 Matemática Elemental – Décimo Año

Solucionario

TERCER EXAMEN PARCIAL - Sábado 10 de octubre

Desarrollo

A. (5 puntos) Determine (en $\mathbb{R}$) el conjunto solución de la ecuación

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(-4x+60\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)-\log_{\frac{1}{2}}(6x-5)=-2$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{\left(-4x+60\right)\left(x+1\right)}{(6x-5)}\right]=-2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{\left(-4x+60\right)\left(x+1\right)}{(6x-5)}$$

$$\Rightarrow 4\cdot(6x-5)=\left(-4x+60\right)\left(x+1\right)$$

$$\Rightarrow 24x-20=-4x^2-4x+60x+60$$

$$\Rightarrow -4x^2+32x+80=0$$

$$\Rightarrow x^2-8x-20=0$$

$$\Rightarrow x=10 \text{ o } x=-2$$

Pruebas:

- Para $x=10$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(-4\cdot 10+60\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(10+1\right)-\log_{\frac{1}{2}}(6\cdot 10-5)$$

$$=\log_{\frac{1}{2}}\left(20\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(11\right)-\log_{\frac{1}{2}}(55)$$

$$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{20\cdot 11}{55}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{4\cdot 5\cdot 11}{5\cdot 11}\right)$$

$$=\log_{\frac{1}{2}}\left(4\right)$$

$$=-2$$

Por lo tanto, $x=10$ es una es solución.

- Para $x=-2$

La expresión $\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)$ no está definida.

Por lo tanto, $x=-2$ NO es una es solución.

Finalmente el conjunto solución de la ecuación es $S=\{10\}$

B. (6 puntos) Determine (en $\mathbb{R}$) el conjunto solución de la ecuación

$$7-3\cdot sen^2x-2\sqrt{3}\cdot\cos x=3+sen^2x$$

$\Rightarrow 7-3\cdot sen^2x-2\sqrt{3}\cdot\cos x-3-sen^2x=0$ (se iguala a cero la ecuación)

$\Rightarrow -4\cdot sen^2x-2\sqrt{3}\cdot\cos x+4=0$ (se agrupan términos semejantes)

$\Rightarrow -4\cdot\left(1-\cos^2 x\right)-2\sqrt{3}\cdot\cos x+4=0$ (se aplica la indentidad $sen^2x=1-\cos^2 x$)

$\Rightarrow 4\cos^2 x-2\sqrt{3}\cdot\cos x=0$ (se aplica la propiedad distributiva y se agrupan semejantes)

$\Rightarrow \cos x\cdot\left(4\cos x-2\sqrt{3}\right)=0$ (se factoriza $\cos x$)

$\Rightarrow \cos x=0 \text{ o } \left(4\cos x-2\sqrt{3}\right)=0$

$\Rightarrow \cos x=0 \text{ o } \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Entonces:

- $\cos x=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \text{ o } x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

- $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \text{ o } x=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es

$$S=\left\{x/x\in\mathbb{R},\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ o } x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \text{ o } x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ o } x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

C. (6 puntos) Si α y β son números reales tales que

- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
- $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$
- $\cos^2 \beta = \frac{64}{289}$
- $sen^2\alpha = \frac{25}{169}$

Usando lo anterior, calcule:

a) $sen(2\alpha)$

b) $\tan \beta$

Por identidad trigonométrica se tiene que:

- $sen^2\beta + \cos^2 \beta = 1 \;\Rightarrow\; sen^2\beta + \frac{64}{289} = 1 \Rightarrow sen^2\beta = \frac{225}{289}$
- $sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1 \;\Rightarrow\; \cos^2 \alpha + \frac{25}{169} = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{144}{169}$

Usando lo anterior y las condiciones $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ se tiene que:

- $sen^2\beta = \frac{225}{289} \;\Rightarrow sen\beta = \pm\sqrt{\frac{225}{289}} = \pm\frac{15}{17}$, como $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ se tiene que $sen\beta = \frac{-15}{17}$
- $\cos^2 \alpha = \frac{144}{169} \;\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$, como $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ se tiene que $\cos\alpha = \frac{-12}{13}$
- $\cos^2 \beta = \frac{64}{289} \;\Rightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{64}{289}} = \pm\frac{8}{17}$, como $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ se tiene que $\cos\beta = \frac{8}{17}$
- $sen^2\alpha = \frac{25}{169} \;\Rightarrow sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$, como $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ se tiene que $sen\alpha = \frac{5}{13}$

Con lo anterior y el uso de las identidades trigonométricas se calcula lo que se solicita:

a) $sen\left(2\alpha\right) = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{-12}{13} = \frac{-120}{169}$

b) $\tan\beta = \frac{sen\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{-15}{17}}{\frac{8}{17}} = \frac{-15}{17}$

Selección única

1	D		8	A		15	D		22	B		29	C		36	C	
2	D		9	D		16	C		23	C		30	D		37	C	
3	B		10	A		17	A		24	C		31	B				
4	B		11	C		18	C		25	C		32	C				
5	B		12	C		19	B		26	B		33	B				
6	D		13	A		20	A		27	A		34	A				
7	C		14	B		21	B		28	A		35	C				