Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2011

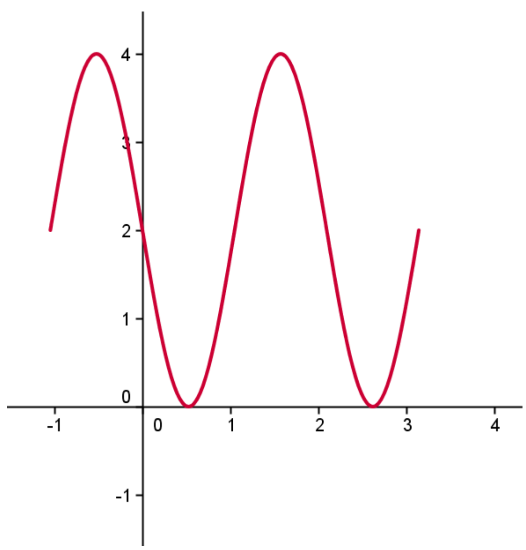
http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
-Décimo Año-

IV EXAMEN PARCIAL 2011

Nombre: ________________________________ código: _______

Colegio: ____



Fórmula

1

Sábado 19 de noviembre

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (33 puntos) y la segunda es de desarrollo (17 puntos).

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 33 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la circunferencia trigonométrica?

(A) $\left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{-17}{13}\right)$

(B) $\left(\dfrac{119}{169}, \dfrac{43}{169}\right)$

(C) $\left(\dfrac{14}{169}, \dfrac{-17}{169}\right)$

(D) $\left(\dfrac{-12}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$

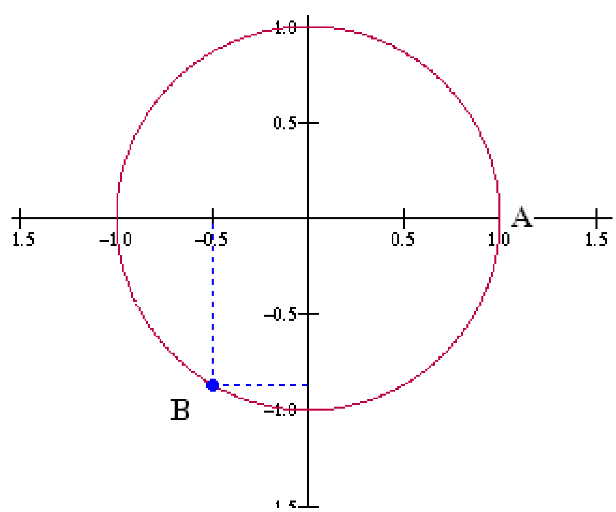
2. En la figura, la longitud del arco mayor $\overset{\frown}{AB}$ es

(A) $\dfrac{7\pi}{6}$

(B) $\dfrac{4\pi}{3}$

(C) $\dfrac{2\pi}{3}$

(D) $\dfrac{5\pi}{6}$



3. Considere el arco $\widehat{OT}$ en la circunferencia trigonométrica con $O(1,0)$ y $T(x,y)$ un punto en la circunferencia trigonométrica tal que $m\left(\widehat{OT}\right)=\frac{7\pi}{6}$ entonces el punto T corresponde al par ordenado

(A) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(B) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

(C) $\left(-1,\sqrt{3}\right)$

(D) $\left(-\sqrt{3},1\right)$

4. Al número real k le corresponde, en la circunferencia trigonométrica, el punto de coordenadas $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ entonces $\cot k$ es igual a

(A) $-\frac{4}{3}$

(B) $-\frac{3}{4}$

(C) $-\frac{5}{3}$

(D) $\frac{5}{4}$

5. Al número real $\frac{49\pi}{6}$ le corresponde, en la circunferencia trigonométrica, el mismo punto que al número

(A) $\frac{149\pi}{6}$

(B) $\frac{-37\pi}{6}$

(C) $\frac{61\pi}{6}$

(D) $\frac{-97\pi}{6}$

6. Si (m,n) es el punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real x y $m \cdot n < 0$, con **certeza** se cumple que

(A) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x > 0$

(B) $\tan x < 0$

(C) $\sec x > 0$

(D) $\csc x < 0$

7. Si el punto de la circunferencia trigonométrica asociado a un número real β se ubica en el III cuadrante, ¿Cuál de las siguientes proposiciones es **imposible** que suceda?

(A) $\sec \beta \cdot \csc \beta < 0$

(B) $1 + \operatorname{sen}\beta < 1$

(C) $\cot \beta > 0$

(D) $\tan \beta + 1 > 0$

8. La expresión $\operatorname{sen}(98\pi)+\cos\left(\frac{-11\pi}{2}\right)+\cos(13\pi)$ es igual a

(A) 2

(B) 1

(C) 0

(D) -1

9. El valor numérico de la expresión $3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\operatorname{sen}\frac{28\pi}{6}\right)^2$ es

(A) 0

(B) 2

(C) $\frac{5}{4}$

(D) $\frac{3}{4}$

10. Si $\operatorname{sen}(k)=\frac{-2}{\sqrt{13}}$ y $\frac{-\pi}{2}<k<0$, entonces $\cos(k)$ es aproximadamente

(A) 0,8320

(B) -0,8320

(C) 0,2774

(D) -0,2774

11. Si $\tan\theta$ es negativo, con certeza se tiene que $\operatorname{sen}(2\theta)$

(A) es cero

(B) es negativo

(C) es positivo

(D) no está definido

12. ¿Cuál de las siguientes expresiones **no está definida**?

(A) $\cot\left(\frac{-11\pi}{2}\right)$

(B) $\tan(2012\pi)$

(C) $\csc\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

(D) $\sec\left(\frac{-19\pi}{2}\right)$

13. La expresión $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{9\pi}{4}\right)$ es igual a

(A) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(D) $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

14. Un intervalo donde es creciente la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-\operatorname{sen}(x)$ es

(A) $[0,\pi]$

(B) $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$

(C) $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

(D) $\left[2\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$

15. El periodo de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3\cdot\cos\left(\frac{4x}{3}+\frac{9\pi}{4}\right)$ corresponde a

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{3\pi}{2}$

(C) $\frac{2\pi}{3}$

(D) $\frac{27\pi}{16}$

16. Considere la función $h:\left]-\pi,\frac{-\pi}{2}\right[\to\mathbb{R},\ h(x)=\tan x$ y analice las siguientes proposiciones:

I. El ámbito de h es $[0,+\infty[$

II. $h\left(\frac{-3\pi}{4}\right)<h\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I.

(B) Sólo la II.

(C) Ambas.

(D) Ninguna.

17. Un intervalo donde la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2\cos x$ es positiva corresponde a

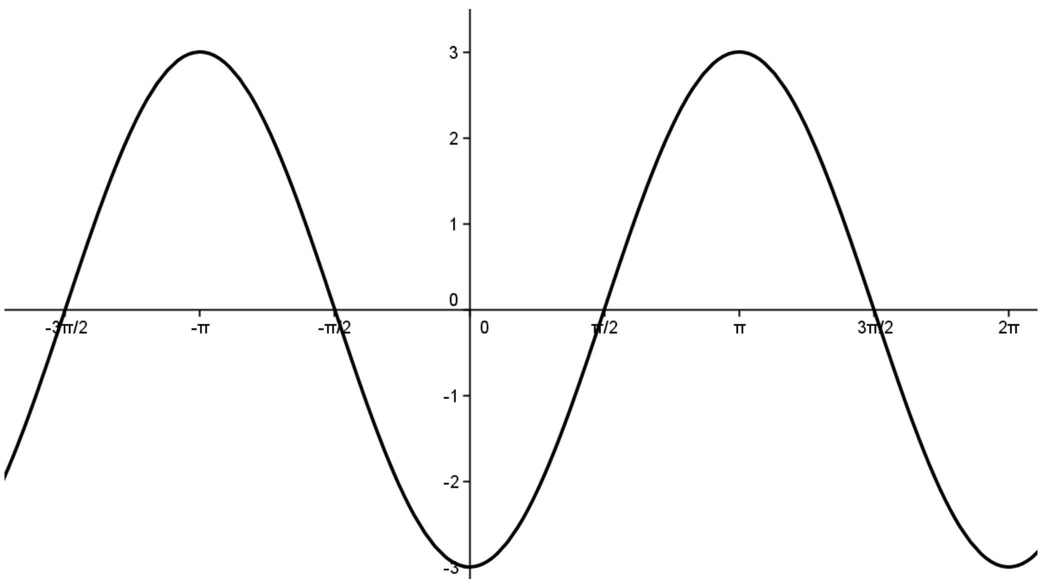
(A) $\left]0, \pi\right[$

(B) $\left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[$

(C) $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

(D) $\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$

18. Considere la siguiente gráfica de una función $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Un criterio de la gráfica anterior puede ser

(A) $j(x) = 3\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(B) $j(x) = 3\text{sen}(x - \pi)$

(C) $j(x) = -3\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(D) $j(x) = -3\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

19. Considere la función $b: \left]\frac{-3\pi}{2}, \pi\right[\to \mathbb{R},\ \ b(x) = \cos x$ y analice las siguientes proposiciones:

I. b interseca al eje X dos veces.

II. Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, entonces $b(x) > 0$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

20. Si $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ para cualquier k entero, la expresión $\tan\alpha - \cot\alpha$ es igual a

(A) $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$

(B) $\frac{-\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$

(C) $\frac{-1}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$

(D) $\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$

21. La expresión $\frac{1}{1+\cos x} - \frac{1}{1-\cos x}$ es equivalente a

(A) $-2\tan x$

(B) $-2\tan^2 x$

(C) $-2\tan x \cdot \sec x$

(D) $-2\cot x \cdot \csc x$

22. Al simplificar la expresión $\operatorname{sen}(\pi + x) \cdot \operatorname{sen}(x - \pi)$ se obtiene la expresión

(A) 0

(B) 1

(C) $\cos^2 x$

(D) $\operatorname{sen}^2 x$

23. La expresión $\dfrac{\sec x}{\tan x} + \cot x$ es equivalente a

(A) $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$

(B) $\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$

(C) $\dfrac{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)}{\cos^2 x}$

(D) $\dfrac{\cos x (1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x}$

24. El ámbito de $f : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$ es

(A) $\mathbb{R}$

(B) $]0, +\infty[$

(C) $]1, +\infty[$

(D) $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

25. La expresión $\dfrac{\sec x - \csc x}{\sec x \cdot \csc x}$ es equivalente a

(A) $\cos x - \operatorname{sen} x$

(B) $\operatorname{sen} x - \cos x$

(C) 1

(D) 0

26. La expresión $\operatorname{sen}(\arccos x)$ es iguala a

(A) $\sqrt{1-x^2}$

(B) $1-x^2$

(C) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

(D) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

27. Considere la función $w:[-1,1] \to \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $w(x) = \operatorname{arcsen}(x)$ y analice las siguientes proposiciones:

I. $w\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < w\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$

II. $w(0{,}8) < 0{,}8$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

28. La expresión $\operatorname{sen}\left(2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ es igual a

(A) $\frac{-1}{2}$

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

29. Analice las siguientes proposiciones:

I. $\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

II. $\arctan\left[\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \frac{5\pi}{6}$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

30. El conjunto de todas las soluciones de $\sec^2 x - 1 = -\sec x + 1$ si $0 \leq x < 2\pi$ es

(A) $\left\{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

(B) $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

(C) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

(D) $\left\{\pi, \frac{\pi}{3}\right\}$

31. El conjunto solución de $1 - \csc^2 x = 0$ es

(A) $\{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

(B) $\left\{\frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

(C) $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

(D) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

32. Considere las siguientes ecuaciones:

I. $\tan(x) - 7 = 0$

II. $3 \cdot \operatorname{sen}(x) - 11 = 0$

¿Cuáles de las ecuaciones anteriores tiene solución en $\mathbb{R}$?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

33. En $\mathbb{R}$, el conjunto solución de $\cos^2 x + 2 = 3\cos x$ es el siguiente

(A) $\{x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

(B) $\{x \in \mathbb{R} / x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

(C) $\left\{0, \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(D) $\varnothing$

Fin de la primera parte

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2011

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

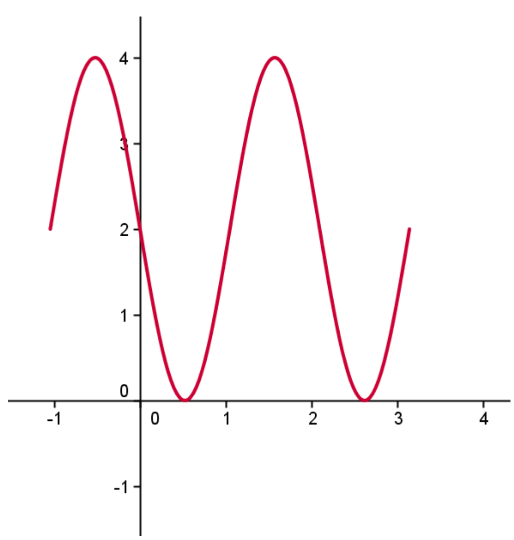
IV EXAMEN PARCIAL 2011

Nombre completo: ____

CÓDIGO: ___________________________

COLEGIO: ____

PREGUNTA	Puntos obtenidos
1	
2	
3	



Sábado 19 de noviembre

SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor 17 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (5 puntos) Verifique la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\tan x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{1}{\cos x - \cos^2 x} \quad \text{para } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \in \mathbb{R} \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. (6 puntos) Considere la función $f : \left[\frac{-\pi}{4}, \pi \right] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3\cos(2x - \pi)$.

a) Determine el ámbito y el periodo de f.

b) Determine los cortes de la gráfica de f con los ejes.

c) Trace la gráfica de f.

3. (6 puntos) Determine, en $\mathbb{R}$, el conjunto solución de la ecuación:

$$4 \cdot \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos^2(x) = \cos^2(x)$$

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2011

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

SOLUCIONARIO

IV EXAMEN PARCIAL 2011 - Sábado 19 de noviembre

Selección única

1	D		8	D		15	B		22	D		29	D	
2	B		9	D		16	B		23	B		30	B	
3	B		10	A		17	B		24	B		31	B	
4	B		11	B		18	D		25	B		32	A	
5	C		12	D		19	C		26	A		33	A	
6	B		13	A		20	B		27	D				
7	A		14	B		21	D		28	C				

1. (5 puntos) Verifique la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\tan x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{1}{\cos x - \cos^2 x} \quad \text{para } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \in \mathbb{R} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Solución:

$$\frac{\tan x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)}{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)}{(1 - \cos^2 x) \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{(1 + \cos x)}{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x) \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1}{(1 - \cos x) \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x - \cos^2 x}$$

2. (6 puntos) Considere la función $f:\left[\frac{-\pi}{4},\pi\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=3\cos(2x-\pi)$.

   a) Determine el ámbito y el periodo de f.
   b) Determine los cortes de la gráfica de f con los ejes.
   c) Trace la gráfica de f.

Solución:

i. Ámbito: $[-3,3]$

ii. Periodo: $\frac{2\pi}{2}=\pi$

iii. Corte con el eje *Y*: $(0,-3)$

Como $f(0)=3\cos(2\cdot 0-\pi)=-3$, el corte con el eje *Y* es $(0,-3)$

- Cortes con el eje *X*:

$f(x)=0$

$\Leftrightarrow 3\cos(2x-\pi)=0$

$\Leftrightarrow \cos(2x-\pi)=0$

$\Leftrightarrow 2x-\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ o } 2x-\pi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi \text{ o } x=\frac{5\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

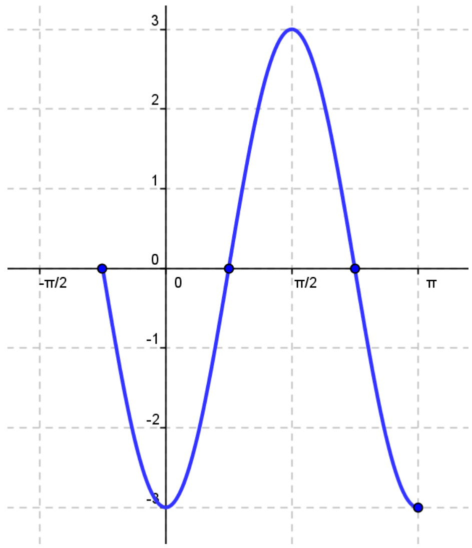
Como el dominio es $\left[\frac{-\pi}{4},\pi\right]$ se deben buscar los valores de k que dan soluciones en dicho dominio.

k	$x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$	$x=\frac{5\pi}{4}+k\pi$
-2	$\frac{-5\pi}{4}$	$\frac{-3\pi}{4}$
-1	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
1	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$

De éstas soluciones las que pertenecen al dominio son: $\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$.

Por lo tanto, los cortes con el eje X son: $\left(\frac{-\pi}{4},0\right), \left(\frac{\pi}{4},0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$.

Note que para los demás valores de k, las soluciones no pertenecen al dominio.



3. (6 puntos) Determine, en $\mathbb{R}$, el conjunto solución de la ecuación:

$$4\cdot \operatorname{sen}^2(x)\cdot \cos^2(x) = \cos^2(x)$$

<u>Solución</u>:

$$4\cdot \operatorname{sen}^2(x)\cdot \cos^2(x) = \cos^2(x)$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot \operatorname{sen}^2(x)\cdot \cos^2(x) - \cos^2(x) = 0$$

$$\Rightarrow\ \left(\cos^2(x)\right)\left(4\cdot \operatorname{sen}^2(x) - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ \cos^2(x) = 0 \quad \text{o} \quad 4\cdot \operatorname{sen}^2(x) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ \cos(x) = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\ \cos(x) = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ \text{o} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Entonces: $S = \left\{ x / x \in \mathbb{R},\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \text{o}\ x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{o}\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$