Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2010

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

MATEM
Matemática para la Enseñanza Media

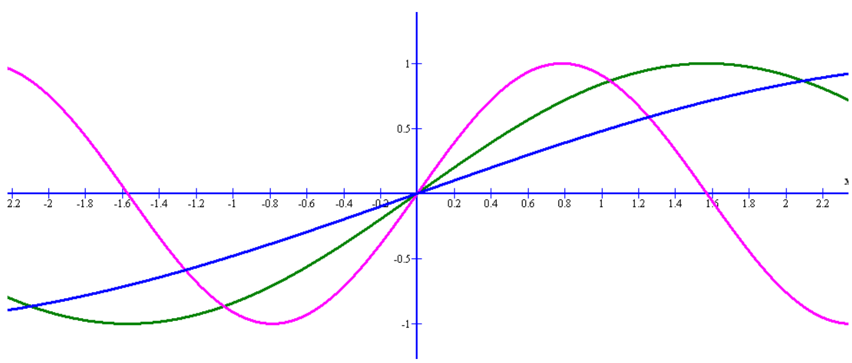
MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL

-Décimo Año-

IV EXAMEN PARCIAL 2010

Nombre: ________________________________ Código: _______

Colegio: ____



Fórmula

1

Sábado 20 de noviembre de 2010

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección y está constituida por 33 ítems y la segunda es de desarrollo y la conforman 3 ítems.

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 33 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. El número rea1 $\frac{-9\pi}{4}$ determina un punto en la circunferencia trigonométrica que se localiza en el cuadrante

(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

2. Si a y b son números positivos y al número real β le corresponde, en la circunferencia trigonométrica, el punto $(-a,b)$, entonces al número real $\beta-\frac{5\pi}{2}$ le corresponde el punto

(A) (a,b)

(B) $(-a,b)$

(C) $(a,-b)$

(D) $(-a,-b)$

3. Si $\left(\frac{2}{3}, b\right)$ es el par ordenado correspondiente a un punto de la circunferencia trigonométrica en el cuarto cuadrante entonces el valor de b es

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $-\frac{5}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(D) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. Analice las siguientes proposiciones:

I) $\cos(-22\pi) = -1$

II) $\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right) = -1$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

5. A cualquier número real de la forma $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donde k es un número entero, le corresponde, en la circunferencia trigonométrica, el siguiente punto de coordenadas

(A) $(1,0)$

(B) $(0,1)$

(C) $(-1,0)$

(D) $(0,-1)$

6. La expresión $\cos\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$ es igual a

(A) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

7. Si $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\sec\theta < 0$ entonces se puede garantizar que

(A) $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0$

(B) $\cos\theta > 0$

(C) $\cot\theta < 0$

(D) $\tan\theta > 0$

8. Analice las siguientes proposiciones:

I) $\tan\left(\frac{\pi}{100}\right) < 0$

II) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{7}\right) > 0$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

9. Analice las siguientes proposiciones:

I) $\cos(-1,3) > 0$

II) $\operatorname{sen}(4,5) < 0$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I
(B) Sólo la II
(C) Ambas
(D) Ninguna

10. Considere la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$ y analice las siguientes afirmaciones:

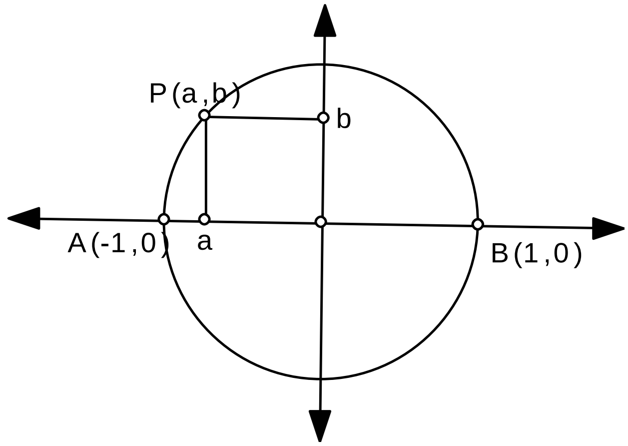
I. $h\left(\frac{\pi}{6}\right)=h\left(\frac{\pi}{3}\right)$

II. $h(0)=h\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I
(B) Sólo la II
(C) Ambas
(D) Ninguna

11. En la figura, la longitud del arco BP es $\frac{5\pi}{6}$ entonces se puede asegurar que



(A) $a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

(B) $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $b = \frac{1}{2}$

(D) $a = -\frac{1}{2}$

12. Un número real que NO pertenece al dominio máximo de la función $f(x) = \tan(x)$ es

(A) $\frac{\pi}{4}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) π

(D) 0

13. El período de la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=-2\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$ corresponde a

(A) $\frac{2\pi}{5}$

(B) $\frac{\pi}{20}$

(C) 2π

(D) $\frac{5\pi}{4}$

14. La amplitud de la función definida por $h(x)=6\ \mathrm{sen}\left(\frac{x}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)$ en su dominio máximo es

(A) $\frac{2\pi}{3}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) 2π

(D) 6

15. El ámbito de la función $g:[\pi,2\pi]\to\mathbb{R},\ g(x)=2+\mathrm{sen}(x)$ es igual a

(A) $[1,3]$

(B) $[1,2]$

(C) $[0,3]$

(D) $[-2,2]$

16. El ámbito de la función $j:\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ j(x)=\cos(x)$ es igual a

(A) $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

(B) $[-1,1]$

(C) $[-1,0]$

(D) $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

17. Un intervalo en el que la función f dada por $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$ es estrictamente creciente corresponde a

(A) $]0,\pi[$

(B) $]\pi,2\pi[$

(C) $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

(D) $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

18. El ámbito de $f:[-1,0]\to\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ f(x)=\operatorname{arcsen} x$ es

(A) $\mathbb{R}$

(B) $[-1,1]$

(C) $\left[\frac{-\pi}{2},0\right]$

(D) $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

19. La expresión $\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{x}\right)\right)$ es igual a

(A) $\frac{2}{x}$

(B) $\frac{2\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}$

(C) $\sqrt{x^2+4}$

(D) $\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

20. La expresión $\operatorname{arcsen}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ es igual a

(A) $\frac{2\pi}{3}$

(B) $\frac{-\pi}{3}$

(C) $\frac{5\pi}{3}$

(D) $\frac{-\pi}{6}$

21. La expresión $\arccos\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]$ es igual a

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{7\pi}{6}$

(C) $\frac{5\pi}{6}$

(D) $\frac{-\pi}{6}$

22. Al simplificar $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ se obtiene

(A) $\tan 2\alpha$

(B) $\cot 2\alpha$

(C) $2\cot 2\alpha$

(D) $2\tan 2\alpha$

23. La expresión $\dfrac{\cos x\cdot\tan^2 x}{\sec x+1}$ es igual a

(A) $\cos x-1$

(B) $\operatorname{sen}^2 x$

(C) $1-\cos x$

(D) $\cos^2 x$

24. Considere las siguientes afirmaciones

I. $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$

II. $-\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(-\alpha)$

III. $\cos(2\pi+\alpha)=\cos(-\alpha)$

De las anteriores proposiciones son verdaderas

(A) La I y la II

(B) La I y la III

(C) La II y la III

(D) Todas

25. La expresión $\sec x - \operatorname{sen} x \cdot \tan x$ es igual a

(A) $\cos x$

(B) $\operatorname{sen} x$

(C) $\dfrac{\cos^2 x \tan x}{\operatorname{sen} x}$

(D) $\operatorname{sen} x(1 - \tan x)$

26. La expresión $\tan\alpha - \cot\alpha$ es igual a

(A) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$

(B) $\dfrac{1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$

(C) $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$

(D) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$

27. La expresión $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$ es equivalente a

(A) $-2\tan x$

(B) $-2\tan^2 x$

(C) $-2\cot x \cdot \csc x$

(D) $-2\tan x \cdot \sec x$

28. La expresión $\dfrac{\cos x+1}{\operatorname{sen} x}+\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x+1}$ es igual a

(A) $2\sec x$

(B) $2\tan x$

(C) $2\csc x$

(D) $2 \operatorname{sen} x$

29. En $[0,2\pi[$ el conjunto solución de $2\cos^2\alpha-\operatorname{sen}\alpha-1=0$ es el siguiente

(A) $\varnothing$

(B) $\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\pi\right\}$

(C) $\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

(D) $\left\{\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{-\pi}{2}\right\}$

30. En $[0,2\pi[$ el conjunto solución de la ecuación $\csc x\cdot\operatorname{sen} x-2\csc x=0$ tiene la siguiente cantidad de elementos

(A) 4

(B) 2

(C) 1

(D) 0

31. Dos soluciones de $4\tan^2\theta = 3\sec^2\theta$ en $[0, 2\pi[$ son

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{5\pi}{6}$

(B) $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{5\pi}{3}$

(C) $\dfrac{\pi}{6}$ y $\dfrac{7\pi}{6}$

(D) $\dfrac{\pi}{6}$ y $\dfrac{2\pi}{3}$

32. La ecuación $\dfrac{2}{\sec^2 x} = \dfrac{1}{\sec x}$ en $[0, 2\pi]$ tiene la siguiente cantidad de soluciones

(A) 0

(B) 2

(C) 3

(D) 4

33. En $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ la ecuación $\sec(x)\left(\sec(x) + 2\right) = 0$ tiene la siguiente cantidad de soluciones

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

-fin-

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2010

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

MATEM
Matemática para la Enseñanza Media

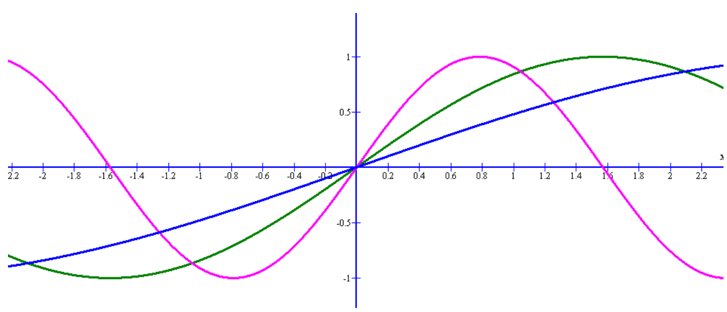
MA-0125 Matemática Elemental – Décimo Año

CUARTO EXAMEN PARCIAL 2010 - sábado 20 de noviembre

Nombre completo: ____

CÓDIGO: __________ COLEGIO: ________________________________

PREGUNTA	Puntos obtenidos
Desarrollo 1	
Desarrollo 2	
Desarrollo 3	
TOTAL	



SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor 16 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas. Deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. Si $\sec x = -5$ y $\cot x < 0$ determine el valor de $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. (5 puntos)

2. Considere la función $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=-3\cdot\operatorname{sen}(2x)$.

a. Determine el ámbito de f. (1 punto)

b. Determine los cortes de la gráfica de f con los ejes. (3 puntos)

c. Trace la gráfica de f e indique en la misma los cortes con los ejes. (2 puntos)

3. Determine el conjunto de todos los números reales que son solución de la ecuación

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\cot x + \cos x}{2}$$ (5 puntos)

-fin-

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2010

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

MA-0125 Matemática Elemental – Décimo Año

Solucionario

CUARTO EXAMEN PARCIAL - sábado 20 de noviembre

Desarrollo

1. Si $\sec x = -5$ y $\cot x < 0$ determine el valor de $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. (5 puntos)

Solución:

a) Como $\sec x = -5$ $\Rightarrow \frac{1}{\cos x} = -5$ $\Rightarrow \cos x = \frac{-1}{5}$	b) Como $\cot x < 0$ $\Rightarrow \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} < 0$ $\Rightarrow \operatorname{sen} x > 0$ porque $\cos x < 0$
c) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \left(\frac{-1}{5}\right)^2 = 1$ $\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{24}{25}$ $\Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$ Como $\operatorname{sen} x > 0$ se tiene que: $\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$	d) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(2x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(2x)$ porque $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ por identidad trigonométrica Sustituyendo $\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ y $\cos x = \frac{-1}{5}$ se tiene que: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{-1}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$

2. Considere la función $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=-3\cdot\operatorname{sen}(2x)$.

a. Determine el ámbito de f. (1 punto)
b. Determine los cortes de la gráfica de f con los ejes. (3 puntos)
c. Trace la gráfica de f e indique en la misma los cortes con los ejes. (2 puntos)

<u>Solución</u>:

a) El ámbito de la función es $[-3,3]$
b) Cortes con los ejes:
Corte con el eje Y: $f(0)=-3\cdot\operatorname{sen}(0)=0$, entonces el corte con el eje Y es $(0,0)$
Corte con el eje X:

Se analiza cuando $f(x)=0$

$f(x)=0$

$\Rightarrow -3\operatorname{sen}(2x)=0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(2x)=0$

$\Rightarrow 2x=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

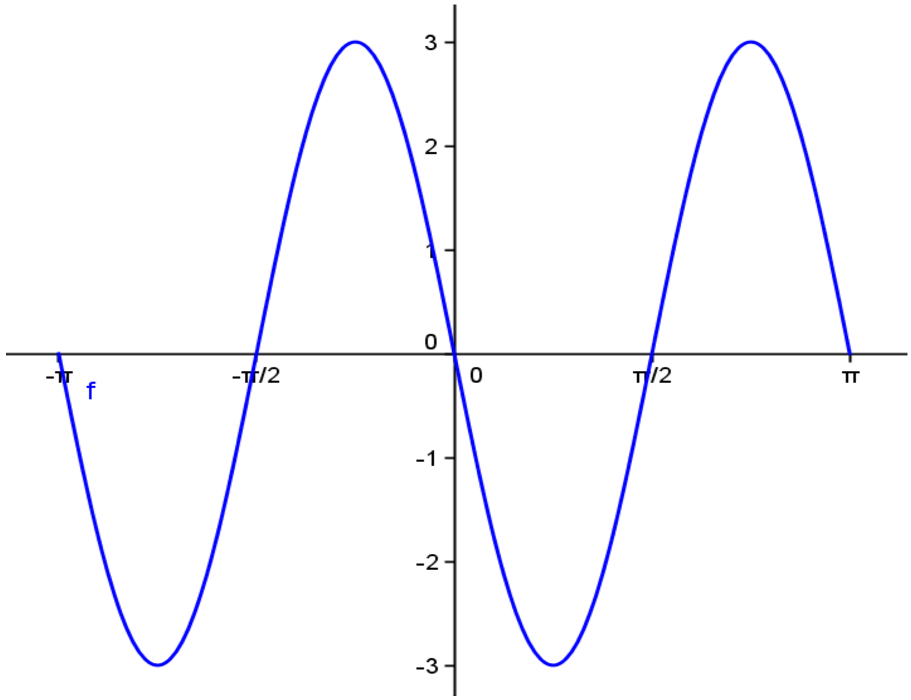
$\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$, como el dominio es $[-\pi,\pi]$, se toman los valores de k: $-2,-1,0,1,2$

Entonces los cortes con el eje X son: $(-\pi,0)$, $\left(\dfrac{-\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ y $(\pi,0)$

Además:

x	$f(x)=-3\operatorname{sen}(2x)$
$\dfrac{-3\pi}{4}$	-3
$\dfrac{-\pi}{4}$	3
$\dfrac{\pi}{4}$	-3
$\dfrac{3\pi}{4}$	3

c) Gráfica de la función:



3. Determine el conjunto de <u>todos los números reales</u> que son solución de la ecuación

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\cot x + \cos x}{2}$$ (5 puntos)

<u>Solución</u>:

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\cot x + \cos x}{2}$$

$$\Rightarrow\ 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \cot x + \cos x$$

$$\Rightarrow\ 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \cos x \quad \left(\text{note que } \ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Rightarrow\ 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\cos x + \cos x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\Rightarrow\ 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = \cos x + \cos x \cdot \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \cos x \cdot \left(2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x \cdot \left(2\operatorname{sen}x+1\right)\left(\operatorname{sen} x-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \text{ o } \operatorname{sen}x = \frac{-1}{2} \text{ o } \operatorname{sen}x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; o \;\; x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \;\; o \;\; x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto el conjunto solución es:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; o \;\; x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \;\; o \;\; x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Selección única

1	D		8	D		15	B		22	B		29	C	
2	A		9	C		16	D		23	C		30	D	
3	D		10	A		17	B		24	C		31	B	
4	B		11	C		18	C		25	A		32	B	
5	D		12	B		19	B		26	C		33	A	
6	D		13	A		20	B		27	D				
7	D		14	D		21	A		28	C				