Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
PROYECTO MATEM - 2009
MA-0125 Matemática Elemental – Décimo Año

Solucionario

CUARTO EXAMEN PARCIAL - Sábado 21 de noviembre 2009

Selección única

1	D		8	C		15	B		22	B		29	D	
2	C		9	A		16	C		23	B		30	C	
3	A		10	C		17	B		24	C		31	B	
4	D		11	B		18	C		25	B		32	B	
5	C		12	D		19	A		26	D		33	A	
6	B		13	C		20	D		27	B		34	C	
7	A		14	C		21	A		28	D		35	A	

Complete

1. El número total de diagonales de un polígono regular cuyo ángulo interno mide 150^0 corresponde a 54.

Solución:

Si n es el número de lados, se tiene que:

$\frac{n(n-3)}{2}$ es el número total de diagonales y $\frac{180^o(n-2)}{n}$ es la medida de cada ángulo interno. Entonces:

$$\frac{180^o(n-2)}{n} = 150^o$$

$$\Rightarrow 180^o(n-2) = 150^o n$$

$$\Rightarrow 180^o n - 360^o = 150^o n$$

$$\Rightarrow 30^o n = 360^o$$

$$\Rightarrow n = 12$$

Como 12 es el número de lados, el número total de diagonales de dicho polígono es

$$\frac{12(12-3)}{2} = 6 \cdot 9 = 54$$

2. El nombre del polígono en el que se pueden trazar 44 diagonales corresponde a endecágono.

Solución:

Si n es el número de lados, $\dfrac{n(n-3)}{2}$ es el número total de diagonales. Entonces:

$$\frac{n(n-3)}{2}=44$$
$$\Rightarrow n(n-3)=88$$
$$\Rightarrow n^2-3n-88=0$$
$$\Rightarrow (n-11)(n+8)=0$$
$$\Rightarrow n=11 \text{ ó } n=-8$$

Como el número de lados es un número positivo, se tiene que $n=11$, por lo que el polígono es un endecágono.

3. La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono en el que cada ángulo central mide 45° corresponde a 1080°.

Solución:

Si n es el número de lados, $\dfrac{360^{\circ}}{n}$ es la medida del ángulo central y $180^{\circ}(n-2)$ es la suma de las medidas de los ángulos internos, entonces:

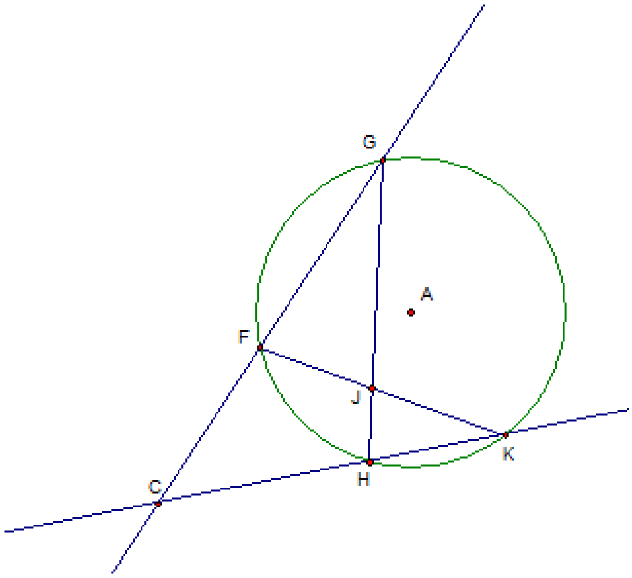
$$\frac{360^{\circ}}{n}=45^{\circ}$$
$$\Rightarrow n=\frac{360^{\circ}}{45^{\circ}}=8$$

Como el número de lados es 8 se tiene que la suma de las medidas de los ángulos internos es $180^{\circ}(8-2)=180^{\circ}\cdot 6=1080^{\circ}$.

4. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, en la cual los arcos menores $\overset{\frown}{FH}$ y $\overset{\frown}{GK}$ miden, respectivamente, 54º y 154º, indique:

$m\angle KJH =$ 76º

$m\angle GCH = 50º$



<u>Solución</u>:

Se tiene que $m\overset{\frown}{FH} = 54º$ y $m\overset{\frown}{GK} = 154º$ por datos dados. Entonces:

• $m\measuredangle KJG = \dfrac{m\overset{\frown}{GK} + m\overset{\frown}{FH}}{2}$ (Ángulo interior) $\Rightarrow m\measuredangle KJG = \dfrac{154º + 54º}{2} = 104º$ • $m\measuredangle KJG + m\measuredangle KJH = 180º$ (par lineal) $\Rightarrow 104º + m\measuredangle KJH = 180º$ $\Rightarrow m\measuredangle KJH = 76º$	• $m\measuredangle GCH = \dfrac{m\overset{\frown}{GK} - m\overset{\frown}{FH}}{2}$ (Ángulo exterior) $\Rightarrow m\measuredangle GCH = \dfrac{154º - 54º}{2}$ $\Rightarrow m\measuredangle GCH = 50º$

Desarrollo

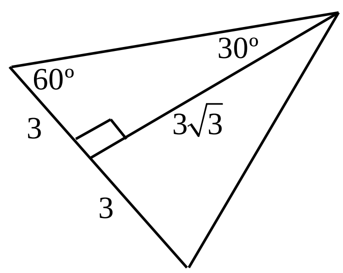
A. El volumen de una pirámide recta de base hexagonal es $162\sqrt{2}$ y el área de la base es $54\sqrt{3}$. Determine:

   a. La altura de la pirámide. (1 punto)
   b. La medida de cada lado de la base. (2 puntos)
   c. El área lateral de la pirámide. (2 puntos)

Solución:

El volumen de una pirámide es $V=\frac{A_b\cdot h}{3}$. Además se tiene $V=162\sqrt{2}$ y $A_b=54\sqrt{3}$.

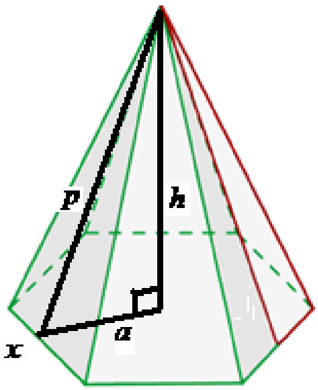
Entonces:

• $V=\frac{A_b\cdot h}{3}$ $\Rightarrow 162\sqrt{2}=\frac{54\sqrt{3}\cdot h}{3}$ $\Rightarrow h=\frac{3\cdot 162\sqrt{2}}{54\sqrt{3}}$ $\Rightarrow h=\frac{3\cdot 162\sqrt{2}}{54\sqrt{3}}$ $\Rightarrow h=\frac{3\cdot 162\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{54\cdot 3}=3\sqrt{6}$	• Como el área de la base es $54\sqrt{3}$, cada uno de los 6 triángulos equiláteros que la formar tiene área $9\sqrt{3}$. Si x es la medida de cada lado de la base de la pirámide entonces: $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$ $\Rightarrow x^2=\frac{4\cdot 9\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow x=6$ Si se toma uno de los triángulos determinados en la base por dos radios consecutivos y el lado comprendido se tiene que: 

	Entonces, la apotema de ese triángulo mide $a = 3\sqrt{3}$

Con la apotema, la altura, y el teorema de Pitágoras se puede calcular la medida de la altura de los triángulos laterales.

$$p^2 = a^2 + h^2$$
$$\Rightarrow p^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{6}\right)^2$$
$$\Rightarrow p^2 = 27 + 54$$
$$\Rightarrow p^2 = 81$$
$$\Rightarrow p = 9$$



El área lateral de la pirámide es

$$A_L = \frac{x \cdot p}{2} \cdot 4$$

$$\Rightarrow A_L = \frac{6 \cdot 9}{2} \cdot 4 = 108$$

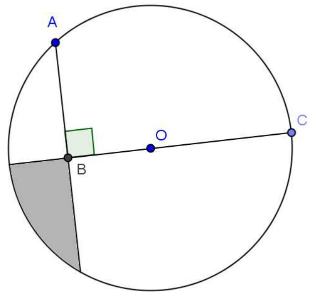
<u>Respuestas</u>:

a. La altura de la pirámide es $3\sqrt{6}$.

b. La medida de cada lado de la base es $x = 6$.

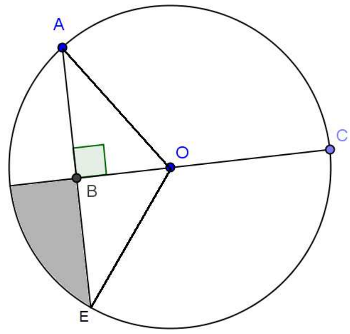
c. El área lateral de la pirámide es 108.

B. Considere la siguiente figura donde O es el centro del círculo. De acuerdo con los datos de la figura, si $AB = 4$ y $BO = 4$ determine el área de la región sombreada. (5 puntos)



Solución:

- Sea E un punto de la circunferencia tal que $E \in \overleftrightarrow{AB}, A - B - E$. Se traza $\overline{AO}$ y $\overline{OE}$.



- Como $AB = 4$ y $BO = 4 \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{BO}$ entonces el ΔAOB es isósceles, $m\sphericalangle AOB = 45^{\circ}$ y $AO = 4\sqrt{2}$.

- Como $\overline{AE} \perp \overleftrightarrow{OB} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{BE}$ entonces $\Delta AOB \cong \Delta EOB$ y $m\sphericalangle EOB = 45^{\circ}$.

- El área del sector circular AOE es $A_{\text{sector}} = \dfrac{\pi r^2 n}{360^{\circ}} = \dfrac{\pi\left(4\sqrt{2}\right)^2 \cdot 90^{\circ}}{360^{\circ}} = \dfrac{2880^{\circ}\pi}{360^{\circ}} = 8\pi$

- El área del ΔAOE es $A_T = \dfrac{AE \cdot BO}{2} = \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16$

- El área de la región sombreada es $A_S = \dfrac{A_{\text{sector}} - A_T}{2} = \dfrac{8\pi - 16}{2} = 4\pi - 8$

fin