UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO MATEM – 2010

Sábado 24 de abril del 2010
Primer Examen Parcial Cálculo I
Tiempo Probable: 3 horas

1. Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{4x-5}{\sqrt{9x^2+8}}$

a) Determine las asíntotas horizontales, si las hay, de la gráfica de $f$.

(6 puntos)

a.1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-5}{\sqrt{9x^2+8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-5}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{8}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-5}{|x|\sqrt{9+\frac{8}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-5}{x\sqrt{9+\frac{8}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)^0}{x\sqrt{9+\frac{8}{x^2}}} = \frac{4}{3}$$

a.2

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-5}{\sqrt{9x^2+8}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{9+\frac{8}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{9+\frac{8}{x^2}}} = \frac{-4}{3}$$

Hay asuntota horizontal en $y = \frac{4}{3}$ y en $y = \frac{-4}{3}$

b) ¿Tiene la curva de $f$ asíntotas verticales? Justifique su respuesta.

(3 puntos)

$D_f : \mathbb{R}$ $\qquad 9x^2+8>0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$

no hay asintotas verticales ya que:

$$\lim_{x\to a} \frac{4x-5}{\sqrt{9x^2+8}} = \frac{4a-5}{\sqrt{9a^2+8}} \quad , \ \forall a \in \mathbb{R}$$

2. Calcule los siguientes límites si existen, si no existen, justifíquelo debidamente:

(18 puntos: 6 cada uno)

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{\sqrt{4-4x+x^2}}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2}}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{|x-2|}$$

no existe porque

• si x>2

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

• si x<2

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{-(x-2)}=1$$

b) $\lim_{x\to -2}\frac{\operatorname{sen}(5x+10)}{4x+8}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(5x+10)}{4x+8}=\lim_{x\to -2}\frac{\sin(5(x+2))}{4(x+2)}$$

sea u=x+2

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin(5u)}{4u}=\lim_{u\to 0}\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{\sin(5u)}{5u}\right]=\frac{5}{4}\cdot 1=\frac{5}{4}$$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{\left(x-1-\sqrt{x+1}\right)}\cdot\frac{x-1+\sqrt{x+1}}{x-1+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-3)\left[x-1+\sqrt{x+1}\right]}{(x-1)^2-(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(x^2-3x\right)}=4$$

3. Demuestre, utilizando la definición formal de límite, que $\lim_{x\to 2}(3x+7)=13$

(5 puntos)

sea $\varepsilon>0$. Tome $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$

entonces, si $|x\text{-}2|<\delta$

$$\Rightarrow |3x+7-13|=|3x-6|=3|3x-2|<3\cdot\delta=3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

4. Determine los valores de la constante $c$ para que $f(x)=\begin{cases} c^2x & \text{si } x\le 1 \\ 3cx-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$. (6 puntos)

SOLUCIÓN:

$f(x)=\begin{cases} c^2x, & \text{si x} \le 1 \\ \text{3cx-2,} & \text{si x>1} \end{cases}$ con c constante

plantear continuidad para $x \in \mathbb{R}\text{-}\{1\}$

dado que $c^2x \wedge$ 3cx-2 son polinomios $\therefore$ son continuos en todo $\mathbb{R}$

y por tanto son continuos en el intervalo $\mathbb{R}\{1\}$

ahora basta analizar la continuidad en x=1

por tanto f(x) es continua en x=1, si:

a) f(1) existe

b) $\lim\limits_{x\to 1}$ f(x) existe

c) $\lim\limits_{x\to 1}$ f(x) = f(1)

$\lim\limits_{x\to 1^-} c^2x = \lim\limits_{x\to 1^+} 3cx-2$

$c^2 = 3c-2$

$c^2-3c+2=0$

$(c-2)(c-1)=0$

$c=2 \quad \wedge \quad c=1$

$R/$ Los valores de c serán:

$c=2$ ó $c=1$

5. a) Enuncie el Teorema del Valor Intermedio. (2 puntos)

b) Muestre que los gráficos de las funciones $g(x)=\operatorname{sen}x$ y $f(x)=1-x$ se intersecan en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Justifique. (4 puntos)

$g$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser función $\sin x$

$f$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser función polinomial

Intersección de curvas

$\sin x = 1 - x$ $\qquad$ $g(x) = f(x)$

$\sin x - 1 + x = 0$ $\qquad$ $f(x) - g(x)$ continua por teorema

$h(x) = \sin x - 1 + x$ $\qquad$ $h(x) = g(x) - f(x)$, es continua

supongamos que N =0

$h(0) = \sin 0 - 1 + 0 = -1 < 0$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$

por lo tanto $h(0) < N < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$

por el teorema del valor intermedio, existe un $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ t.q $f(c) = N = 0$

$R/$ La ecuación $\sin x - 1 + x = 0$ tiene solución en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ por lo que los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$ se intersecan en un punto en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Determine $\frac{dy}{dx}$; no es necesario simplificar.

a) $y = \dfrac{\mathrm{sen}(6x^5 + x - 12)}{\sqrt{x + \tan x}}$ (5 puntos)

$$y' = \frac{(30x+1)\cos\left(6x^5 + x - 12\right)\sqrt{x + \tan x} - \dfrac{1 + \sec^2 x}{2\sqrt{x + \tan x}} \cdot \sin\left(6x^5 + x - 12\right)}{x + \tan x}$$

b) $y = e^{2x-3}\left(\sqrt{5} + \frac{1}{x}\right) - \arctan(5x)$ (5 puntos)

$$y' = 2e^{2x-3}\left(\sqrt{5}+\frac{1}{x}\right)+e^{2x-3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{5}{1+25x^2}$$

c) $y = \dfrac{x^3(x^5+4x)^{23}}{(6-7x)^{3/2}}$ (6 puntos)

$$\ln y = 3\ln x + 23\ln\left(x^5+4x\right)-\frac{3}{2}\ln\left(6-7x\right)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3}{x}+\frac{23\left(5x^4+4\right)}{x^5+4x}+\frac{21}{2\left(6-7x\right)}$$

$$y' = \left[\frac{3}{x}+\frac{23\left(5x^4+4\right)}{x^5+4x}+\frac{21}{2\left(6-7x\right)}\right]\cdot\frac{x^3\left(x^5+4x\right)^{23}}{\left(6-7x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y' = \frac{\left[\ 3x^2\left(x^5+4x\right)^{23}+x^3\cdot 23\left(x^5+4x\right)^{22}\cdot\left(5x^4+4\right)\ \right]\cdot\left(6-7x\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\left(6-7x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot -7x^3\left(x^5+4x\right)^{23}}{\left(6-7x\right)^3}$$

7. La recta que es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $P(2,5)$ pasa por el punto $Q(-1,1)$. Calcule $f(2)$ y $f'(2)$. Justifique. (3 puntos)

$y = f(x)$ $\qquad$ $\mathrm{P}(2,5)$ $\qquad$ $\mathrm{Q}(\text{-}1,1)$

$f(2)=5,$ porque el punto $\mathrm{P}(2,5)$ es el punto de tangencia que pertenece a $f(x)$

$f'(x)=m_{\tan}$

$$m_{\tan}=\frac{1-5}{-1-2}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}\Rightarrow f'(2)=\frac{4}{3}$$

8. Dada la ecuación $x^2+2xy-y^2=1$

a) Calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. (5 puntos)

$x^2+2xy-y^2=1$

$2x+2y+2xy'-2yy'=0$

$y'(2x-2y)=-2x-2y$

$$y'=\frac{-2(x+y)}{2(x-y)}=\frac{-(x+y)}{(x-y)}=\frac{(-x-y)}{(x-y)}$$

$$y''=\frac{[-x-y]'(x-y)-(-x-y)[x-y]'}{(x-y)^2}=\frac{[-1-y'](x-y)-(-x-y)[1-y']}{(x-y)^2}=$$

$$\frac{\left[-1-\left(\frac{-(x+y)}{(x-y)}\right)\right]\cdot(x-y)-(-x-y)\cdot\left[1-\left(\frac{-(x+y)}{(x-y)}\right)\right]}{(x-y)^2}=$$

$$\frac{\left[-1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right]\cdot(x-y)+(x+y)\cdot\left[1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right]}{\left(x-y^2\right)}=$$

$$\frac{\left[\frac{-(x-y)+(x+y)}{(x-y)}\right]\cdot(x-y)+(x+y)\cdot\left[\frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)}\right]}{(x-y)^2}=$$

$$\frac{(-x+y+x+y)+(x+y)\left[\frac{(x-y+x+y)}{(x-y)}\right]}{(x-y)^2}=$$

$$\frac{2y+(x+y)\left[\frac{2x}{(x-y)}\right]}{(x-y)^2}=\frac{2y+\frac{2x^2+2xy}{x-y}}{(x-y)^2}=\frac{\frac{2y(x-y)+2x^2+2xy}{(x-y)}}{(x-y)^2}=$$

$$\frac{\frac{2xy-2y^2+2x^2+2xy}{(x-y)}}{(x-y)^2}=\frac{\frac{2x^2+4xy-2y^2}{(x-y)}}{\frac{(x-y)^2}{1}}=\frac{2x^2+4xy-2y^2}{(x-y)^3}=$$

$$\frac{2\left(x^2+4xy-y^2\right)}{(x-y)^3}$$

como $x^2+4xy-y^2=1$

entonces y''$=\frac{2\cdot 1}{(x-y)^3}=\frac{2}{(x-y)^3}$

b) Considere la curva dada por la ecuación anterior y determine la ecuación de la recta normal a dicha curva en el punto (1, 2). (4 puntos)

sea P(1,2)=

$$y' = \frac{-(x+y)}{(x-y)} = \frac{-(1+2)}{(1-2)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

La recta normal

$$y = mx + b$$

$$2 = \frac{-1}{3}(1) + b$$

$$2 = \frac{-1}{3} + b$$

$$2 + \frac{1}{3} = b$$

$$b = \frac{7}{3}$$

$R/$ La ecuacióm de la recta normal a dicha curva en (1,2) es:

$$y = \frac{-x+7}{3}$$

9. Uno de los lados de un rectángulo tiene un tamaño constante de 10 cm, mientras que el otro lado es variable y aumenta a la velocidad constante de 4 cm/s. ¿A qué velocidad crecerán la diagonal del rectángulo y su área en el instante en que el lado variable es igual a 30 cm? (8 puntos)

1) $\frac{dx}{dt} = 4 \, {}^{cm}\!/_{s}$

Hallar $\frac{dy}{dt}, \frac{dA}{dt}$ cuando $x = 30cm$

2) Ecuación para la diagonal:

cuando $x = 30$:

$y^2 = 10^2 + x^2$

$y^2 = 100 + 900$

$\Rightarrow y = \sqrt{1000}cm$

3) Razón de cambio para la diagonal:

$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{30}{10\sqrt{10}} \cdot 4$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{12}{\sqrt{10}} \, {}^{cm}\!/_{s}$

4) Exuación para el área:

A=10x

A=300cm$^2$

5) Razón de cambio para el área:

$\frac{dA}{dt} = 10\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 10 \cdot 4$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 40 \, {}^{cm^2}\!/_{s}$