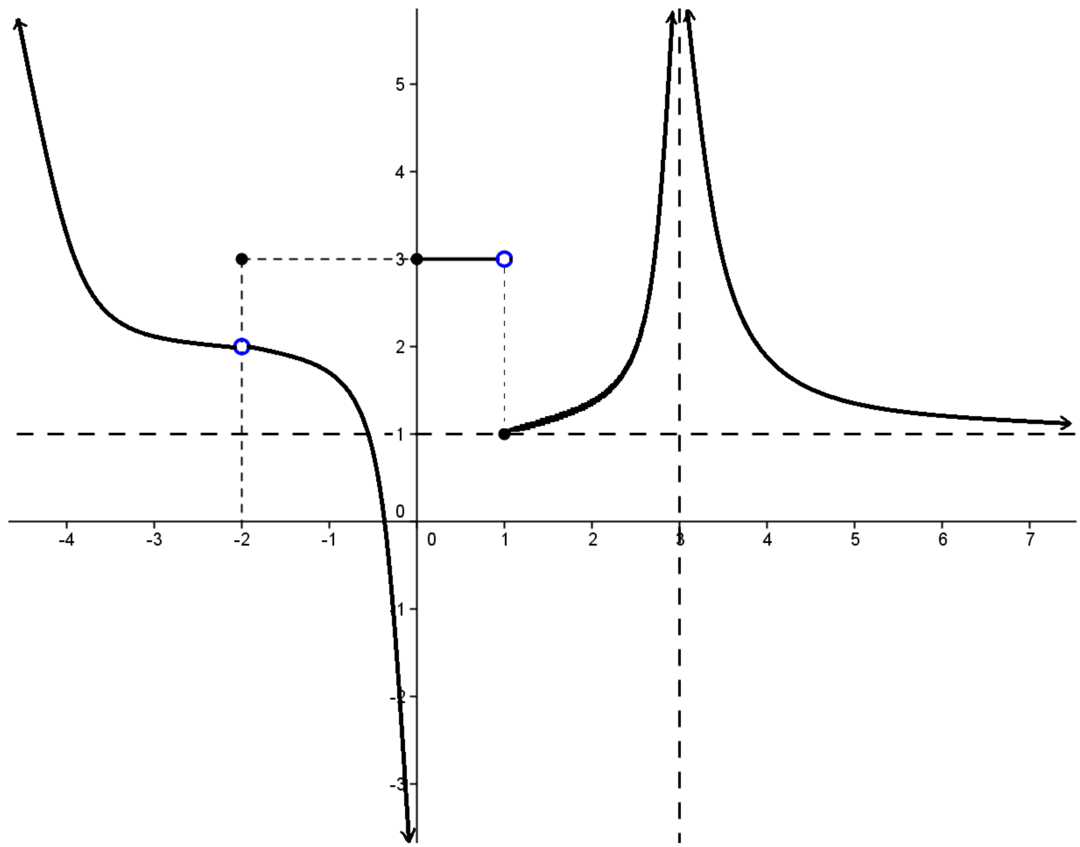
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO MATEM – 2011

Sábado 30 de abril del 2011
Primer Examen Parcial Cálculo I
Tiempo Probable: 3 horas

# Solucionario

**1. Considere la función *f* definida en su dominio máximo y cuya gráfica es la siguiente:**
(12 puntos: 2 pts cada una)




**A. Determine los siguientes límites, si existen; en caso que no existan indíquelo y justifique su respuesta.**

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$

Calculando sus límites laterales, tenemos que

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, pues sus límites laterales son diferentes.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Dado que hay una asíntota horizontal en $y=1$ y que, cuando "$x$ crece", la gráfica de la función tiende a esa recta, se puede concluir que
$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

**B. Determine si *f* es continua en los valores que aparecen a continuación; si es discontinua, determine el tipo de discontinuidad. Justifique sus respuestas.**

a) $x=-2$

Estudiando las condiciones de continuidad en un punto, tenemos:

- Está definida en el punto: $f\left(-2\right)=3$
- El límite existe: $\lim\limits_{x\to-2} f\left(x\right)=2$
- El valor del límite no es igual al valor que toma la función en $x=-2$

$\therefore$Hay una discontinuidad evitable en $x=-2$.

b) $x=3$

Estudiando las condiciones de continuidad en un punto, tenemos:

- $f\left(3\right)$ no existe, pues hay una asíntota vertical en $x=3$
- El límite $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ no existe, pues $\lim\limits_{x\to3^-} f\left(x\right)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to3^+} f\left(x\right)=+\infty$

$\therefore$Hay una discontinuidad inevitable en $x=3$.

**C. Determine si *f* es derivable para los valores indicados; en caso afirmativo, determine el valor de la derivada $f'(x)$ en ese punto.**

a) $x=\frac{1}{2}$

Dado que la derivada en un punto corresponde con la pendiente de la gráfica en ese punto, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, pues la en este caso, la gráfica de la función es constante en el intervalo $\left[0,1\right[$

b) $x=1$

Para que una función sea derivable en un punto, debe ser continua. Así, como $f$ no es continua en $x$ = 1, entonces $f$ no es derivable en ese punto.

**2. Determine, si existen, las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función definida, en su dominio máximo, por el criterio $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{3x^2-1}$.**

(7 puntos)

- *Asíntotas verticales*:

  La función se indefine cuando $3x^2-1=0 \Rightarrow x=\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$

  $$\lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{3}}^+} \frac{x^2+x-1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{3}}^-} \frac{x^2+x-1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=+\infty$$

  $$\lim_{x\to \frac{-1}{\sqrt{3}}^+} \frac{x^2+x-1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \frac{-1}{\sqrt{3}}^-} \frac{x^2+x-1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=-\infty$$

  $\therefore$ Hay asíntotas verticales en $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

- *Asíntotas horizontales*:
  Estudiamos los límites al infinito

  $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{3}$$

  De igual manera $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+x-1}{3x^2-1}=\frac{1}{3}$

  $\therefore$ Hay una asíntota horizontal en $y=\frac{1}{3}$

**3. Calcule los siguientes límites si existen, si no existen, justifíquelo debidamente:**

a) $\lim_{x\to -8} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{8}}{\sqrt[3]{x}+2}$ (5 puntos)

$$=\lim_{x\to -8} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{8}}{\sqrt[3]{x}+2}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to -8} \frac{(8+x)\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{8x\left(x+8\right)}=\frac{4+4+4}{-64}=\frac{-3}{16}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(1-\cos x)}{1-\cos x}$ (4 puntos)

Definiendo la sustitución $\alpha=1-\cos x$, tenemos que $\alpha\to 0$ cuando $x\to 0$

Así, $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=1$ $\quad\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(1-\cos x\right)}{1-\cos x}=1$

**4. Sea** $f(x)=\begin{cases} x^2-16 & \text{si } x<4 \\ 8x-32 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$**.**

**a) Determine si *f* es continua en** $x=4$**.** (4 puntos)

Estudiando las condiciones de continuidad en un punto, tenemos:

- Está definida en el punto: $f(4)=8\cdot 4-32=0$
- El límite $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ existe, pues $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(x^2-16\right)=0$ y $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(8x-32)=0$
- Además, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0=f(4)$

$\therefore$ La función es continua en $x=4$.

**b) Determine si *f* es derivable en** $x=4$**.** (6 puntos)

Para que la función sea derivable en un punto, debe existir el límite que determina la derivada en ese punto por definición: $f'(4)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$

Para verificar que ese límite existe, desarrollamos los laterales:

- $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\left(x^2-16\right)-0}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4}=8$
- $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(8x-32)-0}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{8(x-4)}{x-4}=8$

$\therefore$ La función es derivable en $x=4$ y $f'(4)=8$

**5. Demuestre que las gráficas de las funciones** $f(x)=e^{-x^2}$ **y** $g(x)=x$ **se cortan en el intervalo** $]0,1[$**.** (5 puntos)

Las funciones $f$ y $g$ son continuas por ser, respectivamente, una exponencial y una polinomial, ambas definidas en $[0,1]$.

Consideremos entonces la función definida y continua para $x\in[0,1]$ por el criterio $h(x)=f(x)-g(x)=e^{-x^2}-x$ y demostremos que el gráfico de esta función interseca a la recta $y=0$ en algún punto de ese intervalo.

Al evaluar en sus extremos tenemos:

$h(0)=e^0-0=1>0$ y $h(1)=e^{-1}-1\approx -0,63<0$

Así, como $h$ es continua en $[0,1]$, $h(0)>0$ y $h(1)<0$, por el teorema del valor intermedio existe un $c\in\,]0,1[$ tal que $h(c)=0$. En ese valor $c$ se tendrá $h(c)=f(c)-g(c)=0$, lo que quiere decir que las gráficas de las funciones se intersecan en ese punto.

**6. Determine $\frac{dy}{dx}$; no es necesario simplificar.**

a) $y = \dfrac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+3x^5}}$ (6 puntos)

- Aplicando derivación logarítmica:

$$\ln y = \ln \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+3x^5}}$$

$$\Rightarrow \ln y = 2\ln\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] - \frac{1}{2}\ln\left(1+3x^5\right)$$

Derivando con respecto a $x$:

$$\frac{y'}{y} = 2\cdot\frac{-\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{15x^4}{1+3x^5}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+3x^5}}\left[\frac{2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{15x^4}{2\left(1+3x^5\right)}\right]$$

- Aplicando derivación de un cociente:

$$y' = \frac{2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot -\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot\sqrt{1+3x^5} - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{15x^4}{2\sqrt{1+3x^5}}}{1+3x^5}$$

- Observe que (aunque no es requerido en la solución) la forma simplificada de esta derivada es:

$$y' = \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+3x^5}}\left[\frac{2\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} - \frac{15x^4}{2\left(1+3x^5\right)}\right]$$

b) $y = \text{arcsen}\left(\sqrt{2}x\right) + x^3e^{-2x}\tan(5x)$ (7 puntos)

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x^2}} + 3x^2\cdot e^{-2x}\tan\left(5x\right) + x^3\left[e^{-2x}\cdot -2\cdot\tan\left(5x\right) + e^{-2x}\cdot\sec^2\left(5x\right)\cdot 5\right]$$

$$y' = \sqrt{\frac{2}{1-2x^2}} + 3x^2e^{-2x}\tan\left(5x\right) + x^3\left[-2e^{-2x}\tan\left(5x\right) + 5e^{-2x}\sec^2\left(5x\right)\right]$$

c) $y=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{\arctan(\ln x)}$ (6 puntos)

Se va a aplicar derivación logarítmica:

$$\ln y=\ln\left(x^{\frac{2}{3}\arctan(\ln x)}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{2}{3}\arctan(\ln x)\cdot\ln x$$

Derivando con respecto a *x*:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x+\frac{2}{3}\arctan(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y'=x^{\frac{2}{3}\arctan(\ln x)}\cdot\frac{2}{3x}\left(\frac{\ln x}{1+\ln^2 x}+\arctan(\ln x)\right)$$

**7. Encuentre el o los puntos donde la recta tangente al gráfico determinado por la ecuación $xy^2+x^2y=2$ es horizontal. Justifique su respuesta. (7 puntos)**

Los puntos donde una recta tangente a una curva es horizontal tienen la característica de tener su derivada igual a 0.

Derivamos entonces con respecto a *x*:

$$\frac{d}{dx}\left[xy^2+x^2y\right]=\frac{d}{dx}[2]$$

$$\Rightarrow y^2+x\cdot 2yy'+2xy+x^2y'=0$$

$$\Rightarrow y'\left(2xy+x^2\right)=-2xy-y^2$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-\left(2xy+y^2\right)}{2xy+x^2}$$

Para que $y'=0$ se necesita:

- Que el denominador no sea 0

  $2xy+x^2\neq 0$

  $\Rightarrow x(2y+x)\neq 0$

  $\Rightarrow x\neq 0$ y además $2y\neq -x$

- Que el numerador sea 0

  $2xy+y^2=0$

  $\Rightarrow y(2x+y)=0$

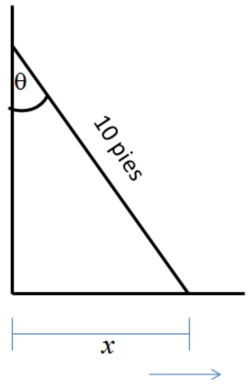
  $\Rightarrow y=0$ o bien $2x=-y$

Ahora, $y=0$ se descarta porque no hay ningún punto en la gráfica determinada por la ecuación dada donde $y=0$, pues al sustituir: $0\neq 2$

Si $y=-2x$, sustituyendo en la ecuación se obtiene $4x^3-2x^3=2\Rightarrow 2x^3=2\Rightarrow x=1$. Para este valor de *x*, se tiene $y=-2$

$\therefore y'=0$ en el punto $(1,-2)$

**8. Una escalera de 10 pies de longitud se apoya contra una pared vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a una velocidad de** $2\ pies/s$**, ¿con qué rapidez cambia el ángulo formado por la parte superior de la escalera y la pared cuando mide** $\frac{\pi}{4} rad$ **?** (7 puntos)




Se tiene que $\frac{dx}{dt} = 2\ p/s$

Además, se quiere encontrar $\frac{d\theta}{dt}$ en el momento cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

Se sabe que la ecuación que relaciona estos datos es:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{10}$$

Ahora derivando con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}[\operatorname{sen}\theta] = \frac{d}{dt}\left[\frac{x}{10}\right]$$

$$\Rightarrow \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dx}{dt}$$

Cuando

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces, al sustituir

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\cdot 2 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{5} rad/s$$

Por lo tanto, cuando la escalera se desliza, el ángulo señalado cambia con una rapidez de $\frac{\sqrt{2}}{5} rad/s$ en el momento cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$.