Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

MATEM
Matemática para la Enseñanza Media

CORRECCIÓN PRIMER EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO I

1. Calcule cada uno de los siguientes límites:

1.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{16+x}}{5-\sqrt{25+x}}$ al evaluar se presenta una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$.

(5 puntos)

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-\sqrt{16+x}}{5-\sqrt{25+x}}\cdot\frac{4+\sqrt{16+x}}{5+\sqrt{25+x}}\cdot\frac{5+\sqrt{25+x}}{4+\sqrt{16+x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{16-16-x}{25-25-x}\cdot\frac{5+\sqrt{25+x}}{4+\sqrt{16+x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x}{-x}\cdot\frac{5+\sqrt{25+x}}{4+\sqrt{16+x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5+\sqrt{25+x}}{4+\sqrt{16+x}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

1.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$ al evaluar se presenta una forma indeterminada del tipo $\infty-\infty$

(5 puntos)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+x}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right]}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right]}=\frac{1}{-2}=\frac{-1}{2}$$

1.3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$ al evaluar se presenta una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

(6 puntos)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

Sea $y^6=\cos x$, entonces $y^3=\sqrt{\cos x}$ y $y^2=\sqrt[3]{\cos x}$.Si $x\to 0 \Rightarrow y\to 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{1\text{-}\cos^2 x} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-y^2}{1-y^{12}} =$$

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2(y-1)}{(1-y^6)(1+y^6)} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2(y-1)}{(1-y^3)(1+y^3)(1+y^6)} =$$

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2(y-1)}{(1-y)(1+y+y^2)(1+y^3)(1+y^6)} =$$

$$\lim_{y\to 1} \frac{-y^2(1-y)}{(1-y)(1+y+y^2)(1+y^3)(1+y^6)} =$$

$$\lim_{y\to 1} \frac{-y^2}{(1+y+y^2)(1+y^3)(1+y^6)} = \frac{-1}{3\cdot 2\cdot 2} = \frac{-1}{12}$$

1.4 $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-x^2+1}{2x^4-3x^3-6x^2+5x+6}$ al evaluar se presenta una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

(4 puntos)

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)(2x^3-5x^2-x+6)} =$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\overset{-2}{\cancel{(1-x)}}}{\underset{0^-}{(x+1)}\underset{15}{(2x^2-7x+6)}} = -\infty$$

1.5 Si $\left|g(x)-3\right|<5(x+2)^2$, $\forall x\in \mathbb{R}^-$. Determine $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)}{4}$ (5 puntos)

$$-5(x+2)^2 < g(x)-3 < 5(x+2)^2 \Rightarrow$$

$$-5(x+2)^2+3 < g(x) < 5(x+2)^2+3 \Rightarrow$$

3 cuando $x\to -2$ 3 cuando $x\to -2$

Por el teorema de intercalación se tiene que $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)}{4}=\dfrac{3}{4}$.

2. Considere la función f cuyo criterio está dado por: (10 puntos)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+m}{x+n} & \text{si} \quad x\leq -2 \\ -nx-m & \text{si} \quad -2<x\leq 2 \\ x^2-7x-5m & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Determine los valores de m y n de tal forma que f sea continua en $\mathbb{R}$.

Note que para f definida en $]-\infty,-2[$ cuyo criterio está dado por $\dfrac{x+m}{x+n}$, se tiene que f es continua en $]-\infty,-2[-\{-n\}$. Por lo tanto al hallar el valor de n se debe corroborar que $n\notin\,]-\infty,-2[$.

Para f cuyos criterios son polinomios se tiene que es continua en los intervalos donde se está definiendo, es decir en $]-2,2]$ y $]2,+\infty[$ para cualesquiera valores de m y n.

Análisis de la continuidad en $x=-2$.

- Existencia del límite:

Si $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x+m}{x+n}=\dfrac{-2+m}{-2+n}$ y $\lim\limits_{x\to -2^+}\left(-nx-m\right)=2n-m$, entonces para que el límite de la función cuando x tiende a -2 exista debe suceder que $\dfrac{-2+m}{-2+n}=2n-m$ (ecuación 1).

- Además $f(-2)=\dfrac{-2+m}{-2+n}$

Continuidad en $x=2$.

- Existencia del límite:

Si $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-nx-m\right)=-2n-m$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-7x-5m=4-14-5m$, entonces para que el límite de la función cuando x tiende a 2 exista debe cumplirse que :

$-2n-m=4-14-5m \Rightarrow -2n=-10-4m \Rightarrow n=5+2m.$ (ecuación 2).

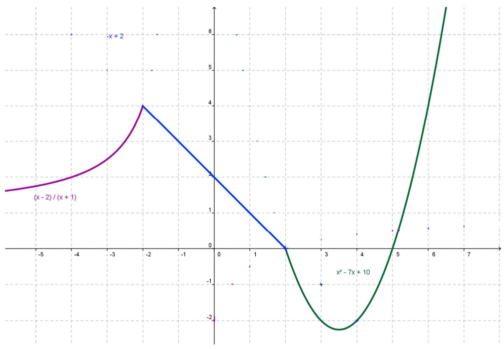
- Además $f(2)=-2n-m$

Ahora sustituimos la ecuación 2 en la ecuación 1 para hallar el valor o valores de m :

$$\frac{-2+m}{-2+5+2m}=2\left(5+2m\right)-m \Rightarrow$$
$$\frac{-2+m}{3+2m}=10+4m-m \Rightarrow$$
$$\frac{-2+m}{3+2m}=10+3m \Rightarrow$$
$$-2+m=\left(3+2m\right)\left(10+3m\right) \Rightarrow$$
$$-2+m=30+20m+9m+6m^2 \Rightarrow$$
$$0=32+28m+6m^2 \Rightarrow$$
$$m_1=2 \quad \vee \quad m_2=\frac{-8}{3}.$$

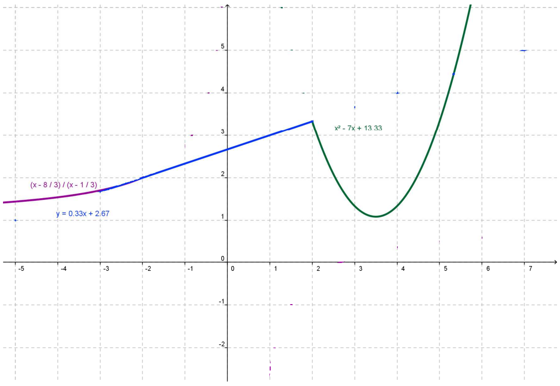
Ahora bien, si $m=-2 \Rightarrow n=1$, entonces

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1} & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x+2 & \text{si} \quad -2<x\le 2 \\ x^2-7x+10 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$



Si $m=-\dfrac{8}{3} \Rightarrow n=\dfrac{-1}{3}$, entonces

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\frac{8}{3}}{x-\frac{1}{3}} & \text{si} \quad x\le -2 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{8}{3} & \text{si} \quad -2<x\le 2 \\ x^2-7x+\dfrac{40}{3} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$



Note que para f definida en $]-\infty,-2[$ cuyo criterio es $\dfrac{x+m}{x+n}$, en ninguno de los dos casos se tiene que $n\in\,]-\infty,-2[$.

3. Determine la ecuación de las dos rectas tangentes a la gráfica de la curva $y=4x-x^2$ y que además pasan por el punto de coordenadas $(2,5)$. (6 puntos)

Sea (a,b) un punto de tangencia. Como $y=4x-x^2 \Rightarrow y'=4-2x$ al evaluar en $x=a$ se tiene que $y'=4-2a$, lo cual equivale a la pendiente de la recta tangente en (a,b). Como la recta contiene a los puntos de coordenadas (a,b) y $(2,5)$, la pendiente de la recta tangente también está dada por $\dfrac{b-5}{a-2}$, entonces

$$\frac{b-5}{a-2}=4-2a \Rightarrow b-5=(4-2a)(a-2) \Rightarrow b=-2a^2+8a-3.$$

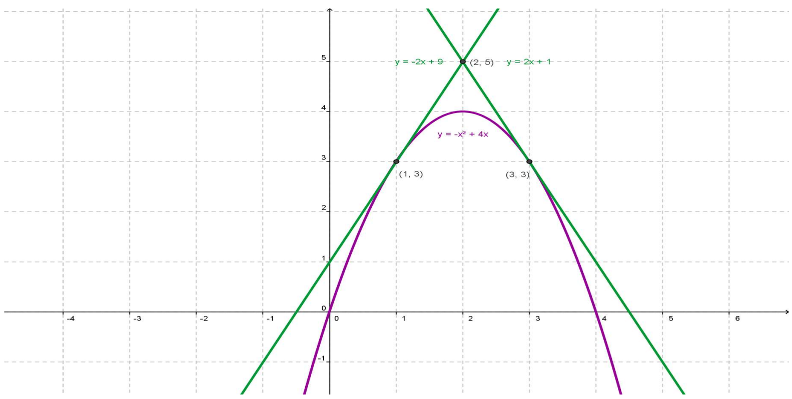
Por otro lado $b=4a-a^2$, igualando

$$-2a^2+8a-3=4a-a^2 \Rightarrow$$
$$-a^2+4a-3=0 \Rightarrow$$
$$a=3 \vee a=1.$$

Si $a=3$ entonces la ecuación de la recta está dada por $y=-2x+9$.

Si $a=1$ entonces la ecuación de la recta está dada por $y=2x+1$.

A continuación se tiene la representación gráfica:



4. Si $f'(a)$ existe, demuestre que $\lim_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)\cdot$ (4 puntos)

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)+af(a)-af(a)}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)-af(x)+af(a)}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(a)(x-a)-a[f(x)-f(a)]}{x-a}=$$
$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(a)(x-a)}{x-a}-\frac{a[f(x)-f(a)]}{x-a}\right\}=$$
$$\lim_{x\to a}\left\{f(a)-\frac{a[f(x)-f(a)]}{x-a}\right\}=$$
Por hipótesis
$$f(a)-a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$$
$$f(a)-af'(a)$$

5. En cada caso determine $\dfrac{dy}{dx}$. No es necesario simplificar su resultado.

5.1 $y=\operatorname{sen}^3\left(5x^2+3\right)\left(x+e^{-2x+1}\right)$ (7 puntos)

$$y=3\operatorname{sen}^2\left(5x^2+3\right)\cdot\cos\left(5x^2+3\right)\cdot 10x\cdot\left(x+e^{-2x+1}\right)+\operatorname{sen}^3\left(5x^2+3\right)\left(1+e^{-2x+1}\cdot -2\right)$$

5.2 $y=\dfrac{5-\cot\left(\dfrac{3}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+\tan x}}$ (7 puntos)

$$y'=\frac{\csc^2\left(\dfrac{3}{x^2}\right)\cdot -6x^{-3}\cdot\sqrt[3]{x^2+\tan x}-\left[5-\cot\left(\dfrac{3}{x^2}\right)\right]\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+\tan x\right)^2}}\cdot\left(2x+\sec^2 x\right)}{\left[\sqrt[3]{x^2+\tan x}\right]^2}$$

-fin-