UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO MATEM – Cálculo I

Sábado 14 de agosto del 2010
Segundo Examen Parcial
Tiempo Probable: 3 horas

INSTRUCCIONES

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo azul o negro.
- **Este es un examen de desarrollo,** por lo tanto, **debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta para cada una de las preguntas.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si la solución para alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.
- Recuerde que la única **calculadora** que se le permite usar es aquella que solamente tiene las **operaciones básicas**.
- **Este examen consta de diez (10) ítems y un total de 76 puntos**. Revise, antes de iniciar, que esté completo.
- **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

1. Las medidas de la base y de la altura de un rectángulo han dado 36 cm y 50 cm, con una cota de error en las medidas de 0,25 cm. Aproximar, usando diferenciales, la cota de error propagado al calcular su área. (6 puntos)

2. Calcule, utilizando la regla de L'Hôpital, cada uno de los siguientes límites:
(14 puntos: 6 y 8 respectivamente)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 3^x}{5^x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x-2} \right)^{3x-2}$

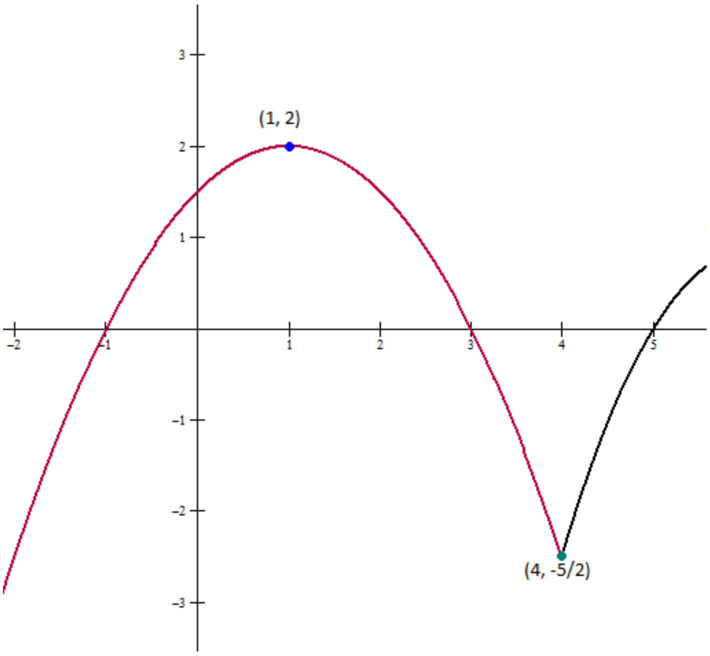
3. Asumiendo que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}$, demuestre que esta solución es única. (5 puntos)

4. Encuentre los valores extremos (máximo y mínimo absolutos) de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el intervalo $[-1\ ,\ 3]$ (5 puntos)

5. Se quiere inscribir un rectángulo dentro de un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el rectángulo y cuáles sus dimensiones?
(8 puntos)

6. Sea $f(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \dfrac{dt}{1+t^2}$ donde $x \neq 0$. Demuestre que f es una función constante. (5 puntos)

7. Considere la gráfica adjunta correspondiente a **la <u>primera derivada</u> de la función *f***, la cual está definida <u>en todos los reales</u>.
(8 puntos: 2 cada una)



a) Determine los intervalos en los cuales f' es positiva. ¿Qué información se obtiene sobre la monotonía de f?

b) Determine los intervalos en los cuales f' es creciente. ¿Qué información se obtiene sobre la concavidad de f?

c) Determine los valores de x para los que $f(x)$ es máximo o mínimo y los valores de x en los que f tiene un punto de inflexión.

d) Si $f(-1)$ y $f(5)$ son de igual signo y $f(-1)$ y $f(3)$ son de signo opuesto, ¿qué se puede afirmar con respecto a la cantidad de ceros de f (en todo su dominio)?

8. Utilice la siguiente información para hacer **un esbozo** de la función f.
(7 puntos)

a. Dominio: $\mathbb{R}-\{3\}$

b. f es derivable en $\mathbb{R}-\{3\}$

c. $f'(x)<0$ para todo $x\in\,]5,+\infty[$ y $f'(x)>0$ para todo $x\in\,]-\infty,3[\,\cup\,]3,5[$

d. $f(-4)=0,\ f(-1)=2,\ f(0)=3,\ f(5)=3,\ f(6)=-1$

e. $f''(x)<0$ para todo $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]3,6[$ y $f''(x)>0$ para todo $x\in\,]-1,3[\,\cup\,]6,+\infty[$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-4$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

9. Calcule las siguientes integrales (10 puntos: 5 cada una)

a) $\int \sec^2(2x)\ \tan(2x)\ dx$ b) $\int x\sqrt{3x+1}\ dx$

10. a) Calcule, usando sumas de Riemann, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$ (5 puntos)

b) Escriba la integral definida que corresponde al límite dado en la parte anterior.
(3 puntos)