UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO MATEM – Cálculo I

Sábado 14 de agosto del 2010
Segundo Examen Parcial
SOLUCIONARIO

1. Las medidas de la base y de la altura de un rectángulo han dado 36 cm y 50 cm, con una cota de error en las medidas de 0,25 cm. Aproximar, usando diferenciales, la cota de error propagado al calcular su área. (6 puntos)

<u>Interpretación 1 para el problema:</u>

Considerando $x = 36$ cm como la base del rectángulo y $y = 50$ cm como su altura, se obtiene un perímetro de 172cm para dicho rectángulo.

Sea x la longitud de su base, $y = 86 - x$ la longitud de su altura y $dx = 0,25$ cm la cota del error cometido al medir dichas longitudes.

Considerando que su área $A = x \cdot y = 36 \cdot 50 = 1800\text{cm}^2$ se obtuvo mediante $A = x(86 - x) = 86x - x^2$, buscamos la cota de error propagado al calcularla:

$\Rightarrow dA = (86 - 2x)dx$

$\Rightarrow dA = (86 - 2 \cdot 36) \cdot 0,25 = 3,5$

Es decir, $\dfrac{dA}{A} = \dfrac{3,5}{1800} \approx 0,00194$, por lo que el error porcentual al calcular el área del rectángulo es $0,194$ %.

<u>Interpretación 2 para el problema:</u>

Considerando $x = 36$ cm como la base del rectángulo y $y = 50$ cm como su altura, se obtiene una diferencia de 14cm entre dichas dimensiones.

Sea x la longitud de su base, $y = x + 14$ la longitud de su altura y $dx = 0,25$ cm la cota del error cometido al medir dichas longitudes.

Considerando que su área $A = x \cdot y = 36 \cdot 50 = 1800\text{cm}^2$ se obtuvo mediante $A = x(x + 14) = x^2 + 14x$, buscamos la cota de error propagado al calcularla:

$\Rightarrow dA = (2x + 14)dx$

$\Rightarrow dA = (2 \cdot 36 + 14) \cdot 0,25 = 21,5$

2. Calcule, utilizando la regla de L'Hôpital, cada uno de los siguientes límites:
(14 puntos: 6 y 8 respectivamente)

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 3^x}{5^x - 1}$ al tener la forma $\dfrac{0}{0}$ se puede aplicar la regla de L'Hôpital directamente:

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 3^x \ln 3 + 2x 3^x}{5^x \ln 5} = \frac{0}{\ln 5} = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-2}\right)^{3x-2}$ Se tiene la forma 1^{∞}, por lo que se puede considerar la expresión $e^{(3x-2)\ln\left(\frac{3x-1}{3x-2}\right)}$. Ahora, al ser la función exponencial continua, basta considerar el límite del exponente: $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)\ln\left(\dfrac{3x-1}{3x-2}\right)$. Como se tiene la forma $\infty\cdot 0$ se transforma en una expresión equivalente de la forma $\dfrac{0}{0}$ para aplicar la regla de L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{3x-1}{3x-2}\right)}{\dfrac{1}{3x-2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x-2}{3x-1}\cdot\dfrac{3(3x-2)-3(3x-1)}{(3x-2)^2}}{\dfrac{-3}{(3x-2)^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{3x-1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-2}\right)^{3x-2} = e^1 = e$$

3. Asumiendo que la ecuación $x^3+x-1=0$ tiene solución en $\mathbb{R}$, demuestre que esta solución es única. (5 puntos)

Como $f(x)=x^3+x-1$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser función polinomial, se puede verificar que en efecto, tiene solución en el intervalo $]0,1[$ pues $\begin{matrix} f(0)=-1 \\ f(1)=1 \end{matrix}$.

Ahora, utilicemos el Teorema de Rolle para probar que dicha solución es única:
Supongamos por contradicción que hay dos soluciones para dicha ecuación, lo que en términos de la función *f* es equivalente a suponer que haya dos ceros en un intervalo dado: Sean x_1 y x_2 tales que $f(x_1)=f(x_2)=0$. Como la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$, el Teorema de Rolle garantiza que existe un valor $c\in\,]x_1,x_2[$ donde $f'(c)=0$.

Sin embargo $f'(x)=3x^2+1>0$ para todo valor de *x*, $f'(x)\neq 0\,\forall x\in\mathbb{R}$, por lo que no puede existir dicho valor de *c*.
Se concluye entonces que la suposición de tener dos ceros reales para la función no puede ser cierta, por lo que la ecuación sólo tiene una solución real.

4. Encuentre los valores extremos (máximo y mínimo absolutos) de la función $f(x)=x^3-3x^2$ en el intervalo $[-1\,,\,3]$ (5 puntos)

Para $f(x)=x^3-3x^2$ se tiene $f'(x)=3x^2-6x$.

Sus puntos críticos se encuentran al resolver $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \vee x = 2$

Al evaluar tanto los extremos del intervalo como los puntos críticos obtenemos:

$f(-1) = -1 - 3 = -4$

$f(0) = 0$

$f(2) = 8 - 12 = -4$

$f(3) = 27 - 27 = 0$

Por lo que el mínimo se obtiene en dos puntos $(-1,-4)$ y $(2,-4)$ y el máximo en dos puntos $(0,0)$ y $(3,0)$.

5. Se quiere inscribir un rectángulo dentro de un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el rectángulo y cuáles sus dimensiones?

(8 puntos)

Dimensiones del rectángulo

ancho : y largo: $2x$

Dominio para x: $0 < x < 2$ Ecuación auxiliar: $2^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$

Objetivo: maximizar el área del rectángulo

$A = 2xy \quad \Rightarrow A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$

Búsqueda del máximo

$$A'(x) = 2\sqrt{4-x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(4-x^2) - 2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-4x^2+8}{\sqrt{4-x^2}}$$

Como $\sqrt{4-x^2} > 0$ para todo $x \in \left]0\,,2\right[$ entonces el máximo de A podría encontrarse cuando $-4x^2 + 8 = 0$ (cuando $A'(x) = 0$)

$x = -\sqrt{2}$ (no está en el dominio), $x = \sqrt{2}$ (si está en el dominio)

Dimensiones del rectángulo para que este tenga un área máxima al estar inscrito en un semicírculo de radio 2:

largo: $2x = 2\sqrt{2}$ ancho: $y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2}$

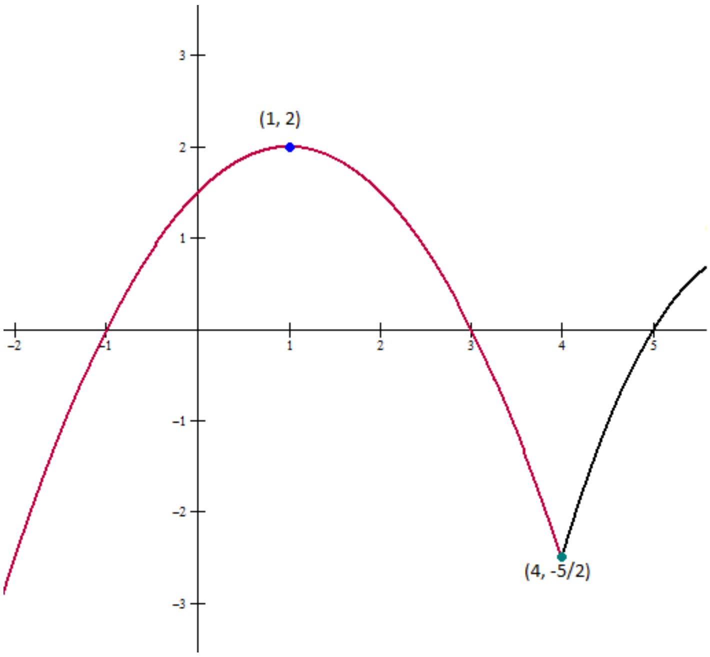
6. Sea $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ **donde** $x \neq 0$**. Demuestre que *f* es una función constante.** **(5 puntos)**

Para mostrar que f es constante, se va a mostrar que $f'(x) = 0$ para todo $x \neq 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\therefore\ f$ es constante

7. Considere la gráfica adjunta correspondiente a la <u>primera derivada</u> de la función *f*, la cual está definida <u>en todos los reales</u>. (8 puntos: 2 cada una)



a) Determine los intervalos en los cuales f' es positiva. ¿Qué información se obtiene sobre la monotonía de *f* ?

$f'>0$ cuando $x\in\,]-1\,,3[$ y $]5\,,+\infty[$, entonces la función crece para todo $x\in\,]-1\,,3[$ y $]5\,,+\infty[$ y decrece para todo $x\in\,]-\infty,-1[$ y $]3\,,5[$.

b) Determine los intervalos en los cuales f' es creciente. ¿Qué información se obtiene sobre la concavidad de *f* ?

f' es creciente en $]-\infty\,,1[$ y $]4\,,+\infty[$, entonces la función es cóncava hacia arriba para todo x en $]-\infty\,,1[$ y $]4\,,+\infty[$ y es cóncava hacia abajo para todo x en $]1,4[$.

c) Determine los valores de *x* para los que $f(x)$ es máximo o mínimo y los valores de *x* en los que f tiene un punto de inflexión.

$f(x)$ es máximo o mínimo cuando $f'(x)=0$ o cuando f' se indefine. En este caso, $f'(x)=0$ cuando $x=-1$, $x=3$ y cuando $x=5$ y f' nunca se indefine, por lo que es en esos valores donde hay máximos o mínimos (estos valores corresponden a los puntos donde hay cambio de crecimiento, parte a).

f tiene puntos de inflexión cuando $f''(x)=0$ o cuando f'' se indefine y eso es cuando $f'(x)$ es máximo o mínimo. En este caso es cuando $x=1$ y cuando $x=4$ (estos valores corresponden a los puntos donde hay cambio de concavidad, parte b).

d) Si $f(-1)$ y $f(5)$ son de igual signo y $f(-1)$ y $f(3)$ son de signo opuesto, ¿qué se puede afirmar con respecto a la cantidad de ceros de *f* (en todo su dominio)?

La función tiene 4 ceros debido a la continuidad de la función, los cambios de signo mencionados y dado que dichos puntos son los extremos relativos de la función (máximos o mínimos).

8. Utilice la siguiente información para hacer un esbozo de la función *f* .
(7 puntos)

a. Dominio: $\mathbb{R}-\{3\}$

b. f **es derivable en** $\mathbb{R}-\{3\}$

c. $f'(x)<0$ **para todo** $x\in\,]5,+\infty[$ **y** $f'(x)>0$ **para todo** $x\in\,]-\infty,3[\,\cup\,]3,5[$

d. $f(-4)=0,\;\; f(-1)=2,\;\; f(0)=3,\;\; f(5)=3,\;\; f(6)=-1$

e. $f''(x) < 0$ **para todo** $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]3, 6\right[$ **y** $f''(x) > 0$ **para todo** $x \in \left]-1, 3\right[\cup \left]6, +\infty\right[$

f. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -4$ **,** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **,** $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ **y** $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

9. Calcule las siguientes integrales **(10 puntos: 5 cada una)**

a) $\int \sec^2(2x)\ \tan(2x)\ dx$

Sea $v = \tan(2x)$

$$dv = 2\sec^2(2x)dx \qquad \frac{1}{2}\int v dv = \frac{v^2}{4} + C \quad = \frac{\tan^2(2x)}{4} + C$$

b) $\int x\sqrt{3x+1}\ dx$

Sea $v = 3x+1 \Rightarrow \frac{v-1}{3} = x$ y $dv = 3dx$

$$\frac{1}{3}\int \frac{v-1}{3}\sqrt{v}dv \ = \frac{1}{9}\int \left(v^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{1}{2}} \right) dv \ = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{5}v^{5/2} - \frac{2}{3}v^{3/2} \right) + C$$

$$= \frac{2}{45}v^{5/2} - \frac{2}{27}v^{3/2} + C \ = \frac{2}{45}(3x+1)^{5/2} - \frac{2}{27}(3x+1)^{3/2} + C$$

10. a) Calcule, usando sumas de Riemann, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$ **(5 puntos)**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}n + \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \frac{3}{2}$$

b) Escriba la integral definida que corresponde al límite dado en la parte anterior. **(3 puntos)**

Se tiene $a = 1$. Además, $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow b = 2$. Así, el límite anterior corresponde a la integral $\int_1^2 x\ dx$.