1. En cada caso determine y'. No es necesario simplificar.

(a) $y=\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}+\operatorname{arcsen}(\log_3(x^2+3))$. *(6 puntos)*

$$y=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}+\operatorname{arcsen}\left(\log_3\left(x^2+3\right)\right)$$

$$y=\frac{1}{2}\ln\left(x-1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x+3\right)+\operatorname{arcsen}\left[\log_3\left(x^2+3\right)\right]$$

$$y'=\frac{1}{2\left(x-1\right)}-\frac{1}{2\left(x+3\right)}+\frac{1}{\sqrt{1-\left[\log_3\left(x^2+3\right)\right]^2}}\cdot\frac{1}{\left(x^2+3\right)\ln 3}\cdot 2x$$

(b) $\arctan(x+y)=y^2+e^{xy}$. *(7 puntos)*

$$\arctan\left(x+y\right)=y^2+e^{x\cdot y}\left(y+xy'\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+\left(x+y\right)^2}\cdot\left(1+y'\right)=2y\cdot y'+e^{x\cdot y}\left(y+xy'\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+\left(x+y\right)^2}+\frac{y'}{1+\left(x+y\right)^2}=2y\cdot y'+ye^{xy}+xy'e^{xy}\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{1+\left(x+y\right)^2}-2yy'-xy'e^{xy}=ye^{xy}-\frac{1}{1+\left(x+y\right)^2}\Rightarrow$$

$$y'\left(\frac{1}{1+\left(x+y\right)^2}-2y-xe^{xy}\right)=ye^{xy}-\frac{1}{1+\left(x+y\right)^2}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{ye^{xy}-\dfrac{1}{1+\left(x+y\right)^2}}{\dfrac{1}{1+\left(x+y\right)^2}-2y-xe^{xy}}$$

2. En un depósito en forma cónica se está vertiendo agua a razón de $0,2\, m^3$ por minuto. El cono tiene 8 metros de profundidad y 4 metros de diámetro. Si hay una fuga en el vértice y el nivel de agua está subiendo a razón de 2 centímetros por minuto cuando el agua tiene 5 metros de profundidad, ¿con qué rapidez escapa el agua del depósito? *(8 puntos)*

V=V(t) volumen de agua en el cono.

$V_1 = V_1(t)$ Volumen que entra y $V_2 = V_2(t)$ Volumen que sale.

$\dfrac{dV_1}{dt} = 0,2m^3/\min$. Se debe encontrar $\dfrac{dV_2}{dt}$.

$h = h(t)$ Altura del nivel de agua $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{2cm}{\min} = 0,02m/\min$. y luego $\dfrac{r}{2} = \dfrac{h}{8} \Rightarrow r = \dfrac{h}{4}$. Ahora se tiene:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{h}{4}\right)^2 h \Rightarrow$$

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h^2}{16} \cdot h \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{\pi}{48} h^3 \Rightarrow$$

$$\frac{dV_1}{dt} - \frac{dV_2}{dt} = \frac{\pi}{16} h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow$$

$$0,2 - \frac{dV_2}{dt} = \frac{\pi}{16} \cdot (5)^2 \cdot 0,02 \Rightarrow$$

$$0,2 - \frac{dV_2}{dt} \approx 0,098125 \Rightarrow$$

$$-\frac{dV_2}{dt} \approx -0,101875 \Rightarrow$$

$$\frac{dV_2}{dt} \approx 0,1019$$

Respuesta: El agua escapa del depósito aproximadamente a $0,1019m/\min$

3. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{sen(x)}}{1-\cos(x)}$. *(6 puntos)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\sin(x)}}{1-\cos(x)}=\frac{e^{0}-e^{\sin(0)}}{1-\cos(0)}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

Por el teorema de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\sin(x)}}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}}{\operatorname{sen}(x)}=\frac{0}{0}.\text{ Nuevamente aplicamos L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\left[-\sin(x)\cdot e^{\sin(x)}+\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)\right]}{\cos(x)}=\frac{1-(0+1)}{1}=0$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[1-sen(2x)\right]^{\cot(3x)}$. *(6 puntos)*

$$\lim_{x\to 0}\left[1-\sin(2x)\right]^{\cot(3x)}=0^{\infty}.\text{ Luego}$$

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln\left[1-\sin(2x)\right]^{\cot(3x)}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot(3x)\cdot\ln\left(1-\sin(2x)\right)}.\text{ Ahora calculamos }\lim_{x\to 0}\cot(3x)\cdot\ln\left(1-\sin(2x)\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\cot(3x)\cdot\ln\left(1-\sin(2x)\right)=\infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\sin(2x)\right)}{\tan(3x)}=\frac{0}{0}.\text{ Por el teorema de L'Hopital:}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1-\sin(2x)}\cdot\cos(2x)\cdot 2}{\sec^{2}(2x)}=\frac{\dfrac{-2\cos(0)}{1-\sin(0)}}{\sec^{2}(0)}=-2$$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\left[1-\sin(2x)\right]^{\cot(3x)}=e^{-2}$$

4. Demuestre que la ecuación $x^3+3^{2x}=2-x$ posee una única solución real en el intervalo $[-1,1]$.

(8 puntos)

Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=x^3+3^{2x}+x-2$

- *F* es una suma de funciones exponenciales y polinomial continua en $\mathbb{R}$, por lo tanto es continua en $[-1,1]$
- $f'(x)=3x^2+3^{2x}\cdot 2\ln 3+1$, note que *f* es derivable en $]-1,1[$
- $f(-1)=(-1)^3+3^{-2}-1-2=-1+\frac{1}{9}-3=-\frac{35}{9}$
  $f(1)=(1)^3+3^2+1-2=9$

Existencia:

- Por lo anterior se tiene que *f* es continua, además
- $f(-1)<0<f(1)$

$\therefore$ Por el teorema del valor intermedio se tiene que $\exists c\in\,]-1,1[$ tal que $f(c)=0$, es decir $c^3+3^{2c}+c-2=0\Rightarrow c^3+3^{2c}=2-c$, por lo tanto $x^3+3^{2x}=2-x$ posee una solución en $[-1,1]$.

Unicidad:

Supongamos que existe otro valor $k\in[-1,1]$ tal que $f(k)=0$

De la primera parte se tiene que f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo tanto es continua y derivable en $[c,k]$ (sin pérdida de generalidad) y $]c,k[$ respectivamente. Además $f(c)=f(k)=0$, por lo tanto por el teorema de Rolle se tiene que $\exists w\in\,]c,k[$ tal que

$f'(w)=0$, esto es

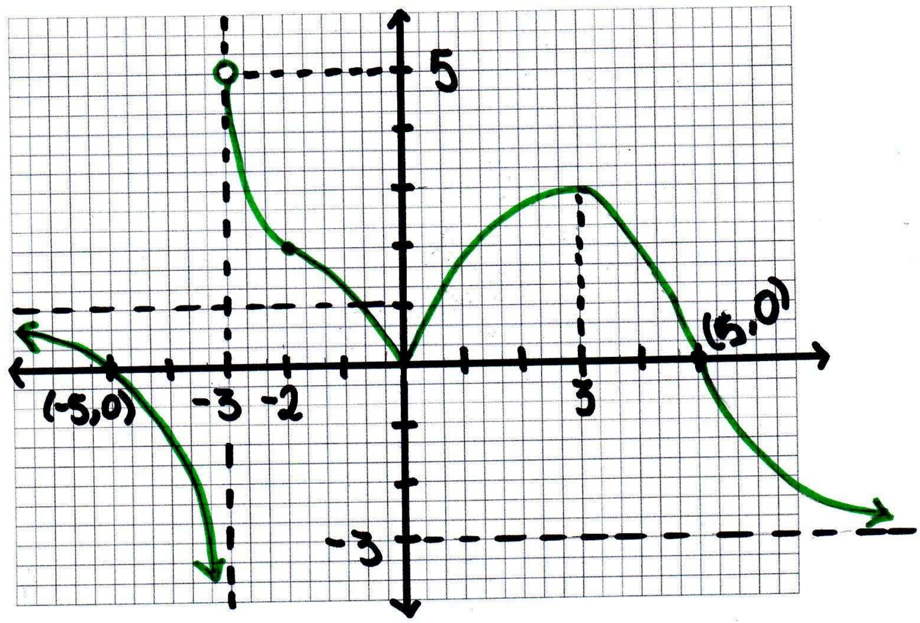
$3w^2+3^{2w}\cdot 2\ln 3+1=0 \quad \Rightarrow\Leftarrow$ pues $3w^2\geq 0,\quad \forall w\in\mathbb{R}$ y $2\cdot 3^{2w}\ln 3>0,\quad \forall w\in\mathbb{R}$.

Entonces la ecuación $x^3+3^{2x}=2-x$ tiene solo una solución en $[-1,1]$.

5. Trace la gráfica de la función f de tal manera que se cumplan cada una de las siguientes condiciones: *(12 puntos)*

- El dominio de f es $\mathbb{R}-\{-3\}$ y f es continua en todo su dominio.
- $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 5$, $f'(0)$ no existe, $f'(3)=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -3$.
- Las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes están dados por $(-5,0)$, $(0,0)$ y $(5,0)$.
- Además la tabla de signos de su primera y segunda derivada está dada por:

	$-\infty$ -3	-3 -2	-2 0	0 3	3 5	5 $+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	+	-	-
$f''(x)$	-	+	-	-	-	+


5
(5,0)
(-5,0)
-3
-2
3
-3

6. La resistencia de una viga rectangular es igual al producto de una constante K, del largo de la base y del cuadrado del ancho de la base. Determine las dimensiones de la viga más resistente que pueda cortarse de un tronco en forma de cilindro circular recto con radio de $72\ cm$. La constante K depende del tipo de madera y $K \in \mathbb{R}^+$. *(6 puntos)*

Sea *R*= resistencia. Sea *R* la función que modela la resistencia de la viga tal que:

$$x^2 + y^2 = (144)^2 \qquad y^2 = (144)^2 - x^2$$

$$R = k \cdot x \cdot y^2$$
$$R(x) = k \cdot x\left(144^2 - x^2\right) \Rightarrow$$
$$R(x) = 20736kx - kx^3 \Rightarrow$$
$$R'(x) = 20736k - 3kx^2 \Rightarrow$$
$$20736k - 3kx^2 = 0 \Rightarrow$$
$$3k\left(6912 - x^2\right) = 0 \Rightarrow$$
$$3k\left(\sqrt{6912} - x\right)\left(\sqrt{6912} + x\right) = 0$$
$$x = \sqrt{6912} \qquad o \qquad x = -\sqrt{6912}$$

	$-\sqrt{6912}$	$\sqrt{6912}$	
$\left(\sqrt{6912} - x\right)$	+	+	-
$\left(\sqrt{6912} + x\right)$	-	+	+
$R'(x)$	-	+	-
R	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Por lo tanto cuando

$x = \sqrt{6912}$ y $y = \sqrt{(144)^2 - \left(\sqrt{6912}\right)^2} = \sqrt{13824}.$

Respuesta: Si $x = \sqrt{6912} = 48\sqrt{3}$ y $y = \sqrt{13824} = 48\sqrt{6}$ obtendrá la viga más resistente.