Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

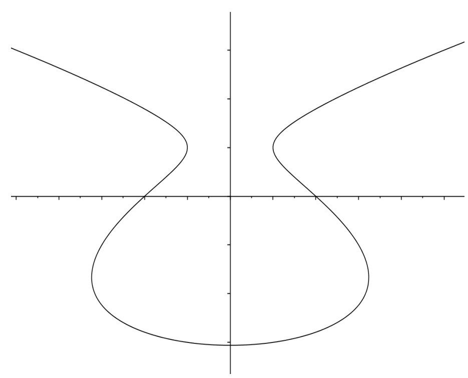
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO I

Sábado 22 de junio de 2013

INSTRUCCIONES

- Antes de contestar, lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble azul o negra para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- **Este examen es de desarrollo, por lo que deberá ser resuelto en el cuaderno de examen**, **y debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada ítem.
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de ocho (8) ítems y un total de 64 puntos.**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas**.

1. (5 puntos) En la gráfica de la derecha se muestra la curva de ecuación $y^3+y^2-5y=x^2-4$. Determine las coordenadas del punto del segundo cuadrante en el cual la recta tangente es vertical.



Solución

Se deriva en forma implícita:

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2+2y-5\right)=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$

Si la recta tangente a la curva es vertical en un punto (a,b) de la curva en el segundo cuadrante, se debe cumplir que $a<0$, $b>0$ y además

$$\begin{aligned} &3b^2+2b-5=0\\ &(3b+5)(b-1)=0\,.\\ &b=-\frac{5}{3}\vee b=1 \end{aligned}$$

Entonces $b=1$ y sustituyendo en la ecuación de la curva se tiene :

$$\begin{aligned} 1^3+1^2-5&=a^2-4\\ 1&=a^2\\ \pm 1&=a \end{aligned}\,.$$

Como el punto debe estar en el segundo cuadrante, sus coordenadas son $(-1,1)$.

2. (5 puntos) Verifique que si $y=x\arctan(2x)-\frac{1}{4}\ln\left(4x^2+1\right)$ entonces $y''+4x^2y''=2$.

Solución

$$y=x\arctan(2x)-\frac{1}{4}\ln\left(4x^2+1\right)$$

$$y'=\arctan(2x)+x\frac{2}{1+4x^2}-\frac{1}{4}\frac{8x}{1+4x^2}=\arctan(2x)+\frac{2x}{1+4x^2}-\frac{2x}{1+4x^2}=\arctan(2x)$$

$$y''=\frac{2}{1+4x^2}\Rightarrow y''\left(4x^2+1\right)=2\Rightarrow y''+4x^2y''=2$$

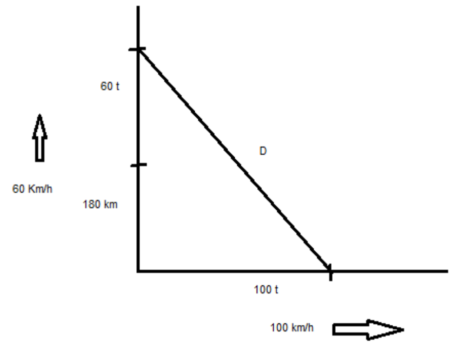
3. (7 puntos) Dos trenes parten de una estación con 3 horas de diferencia. El primero en partir se dirige hacia el norte con una rapidez de 60 $\frac{km}{h}$. El otro tren se dirige hacia el este con una rapidez de 100 $\frac{km}{h}$. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 2 horas después que partió el segundo tren?

Solución

En el momento en que sale el segundo tren, el primero ha recorrido 180 km.

Sea t el tiempo transcurrido desde que partió el segundo tren.

La distancia total, en km, que ha recorrido el primer tren t horas después de que parte el segundo es: $180+60t$



La cantidad de kilómetros recorrida por el segundo tren es : $100t$.

La distancia D, en Km, entre los trenes en ese momento satisface: $D^2=(100t)^2+(180+60t)^2$

Al derivar respecto al tiempo se obtiene:

$$D^2=(100t)^2+(180+60t)^2$$
$$2D\frac{dD}{dt}=200t\cdot 100+2(180+60t)60$$
$$\frac{dD}{dt}=\frac{10000t+60(180+60t)}{D}$$
$$\frac{dD}{dt}=\frac{13600t+10800}{D}$$

Cuando t = $2h$ $D=\sqrt{(200)^2+(300)^2}=100\sqrt{13}$ y entonces

$$\frac{dD}{dt}=\frac{27200+10800}{100\sqrt{13}}=\frac{272+108}{\sqrt{13}}=\frac{380}{\sqrt{13}}\approx 105,4$$

Por lo tanto, en ese instante la distancia entre los trenes aumenta a una velocidad de aproximadamente $105,4\ \frac{km}{h}$.

4. (7 puntos) Considere la función $f:[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2\operatorname{sen}(x)-\cos(2x)$. Determine el máximo absoluto y el mínimo absoluto.

Solución

Como *f* es una función continua y está definida en un intervalo cerrado, para determinar sus extremos absolutos se requiere calcular la imagen de cada uno de los números críticos, $f(0)$ y $f(2\pi)$.

$$\begin{aligned}
&f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x) - \cos(2x) \\
&\Rightarrow f'(x) = 2\cos(x) + 2\,\mathrm{sen}(2x) \\
&= 2\cos(x) + 4\,\mathrm{sen}(x)\cos(x) \\
&= 2\cos(x)\left[1 + 2\,\mathrm{sen}(x)\right]
\end{aligned}$$

Los números críticos son :

$0 = 2\cos(x)\left[1 + 2\,\mathrm{sen}(x)\right]$

$\cos(x) = 0 \quad \vee \quad \mathrm{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \dfrac{3\pi}{2} \quad \vee \quad x = \dfrac{7\pi}{6} \quad \vee \quad x = \dfrac{11\pi}{6}$

Para determinar el máximo y el mínimo basta identificar el mayor y el menor de los siguientes números :

$f(0) = -1 \qquad f(2\pi) = -1 \qquad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1 \qquad f\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\dfrac{3}{2} \qquad f\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = -\dfrac{3}{2}$

Por lo tanto, el máximo de *f* es 3 y el mínimo es -1.

5. (6 puntos) Demuestre que si $a > 0$ y n es un número entero positivo, la ecuación $0 = x^{2n+1} + ax + b$ no puede tener dos raíces reales distintas.

Solución

Considere la función definida por $f(x) = x^{2n+1} + ax + b$ f es polinomial entonces es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Suponga que la ecuación tiene dos raíces reales distintas *p* y *q* con $p < q$.

Se tiene entonces que f es continua en $[p,q]$ y derivable en $]p,q[$ y además $f(p)=f(q)=0$.

Por el teorema de Rolle se cumple que existe un número real $r\in\,]p,q[$ tal que $f'(r)=0$.

$$f'(r)=(2n+1)r^{2n}+a=0$$

Como $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+a$ entonces se cumple que $r^{2n}=-\dfrac{a}{2n+1}$

$$\left(r^{n}\right)^{2}=-\frac{a}{2n+1}$$

Como a y n son números positivos entonces $-\dfrac{a}{2n+1}<0$ pero el término izquierdo no puede ser negativo pues es el cuadrado de un número real. Por lo tanto esta igualdad es imposible, lo cual contradice el supuesto de que existían dos raíces reales distintas, como se quería probar.

6. (7 puntos) Determine los puntos de la parábola de ecuación $y=1-x^2$ que son más cercanos al punto de coordenadas $(0,-2)$.

Solución

Todo punto de la parábola tiene coordenadas de la forma $\left(a,1-a^2\right)$.

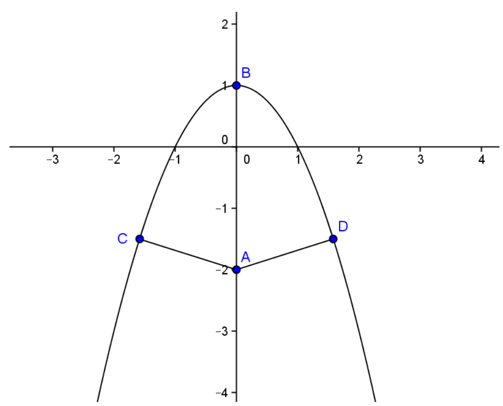
La distancia d de ese punto al $(0,-2)$ está dada por

$$d=\sqrt{(a-0)^2+\left(1-a^2+2\right)^2}$$

$$d=\sqrt{a^2+\left(3-a^2\right)^2}$$

$$d=\sqrt{a^2+9-6a^2+a^4}$$

$$d=\sqrt{9-5a^2+a^4}$$



La distancia es mínima cuando el valor del polinomio que está en el subradical es mínimo:

$$P(a) = 9 - 5a^2 + a^4$$
$$P'(a) = -10a + 4a^3 = 2a(2a^2 - 5) = 2a\left(a\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(a\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$$

Los números críticos son $a = 0, \quad a = \dfrac{\sqrt{10}}{2}, \quad a = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Como $P''(a) = -10 + 12a^2 \Rightarrow P''(0) < 0, \quad P''\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right) = P''\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right) > 0$ entonces la distancia es mínima en los puntos $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, -\dfrac{3}{2}\right), \quad \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

7. Calcule los siguientes límites:

a. (4 puntos) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 e^x\right)$

Solución

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 e^x\right) \quad \textit{forma} \quad \infty \cdot 0$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \quad \textit{forma} \quad \frac{\infty}{\infty} L'H$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \quad \textit{forma} \quad \frac{\infty}{\infty} L'H$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

b. (7 puntos) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

Solución

Como $(\operatorname{sen} x)^x = e^{\ln(\operatorname{sen} x)^x} = e^{x \ln(\operatorname{sen} x)}$ considere el límite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\ln(\operatorname{sen} x)\right] \quad \textit{forma } \infty\cdot 0$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x}} \quad \textit{forma } \frac{\infty}{\infty} L'H$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{\tan x} \quad \textit{forma } \frac{0}{0} L'H$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{\sec^2 x} = 0$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^x = e^0 = 1$

8. Considere la función f definida en su dominio máximo, cuyo criterio está dado por $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$, para la cual se cumple que $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ y $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

a. (5 puntos) Determine, si existen, las asíntotas de la gráfica.
b. (5 puntos) Determine los intervalos de monotonía y puntos extremos (dónde crece, decrece, puntos máximos y mínimos relativos).
c. (3 puntos) Analice la concavidad y escriba los intervalos correspondientes. Si hay puntos de inflexión indíquelos.
d. (3 puntos) Con base en la información obtenida construya la gráfica de f en su máximo dominio.

Solución:

a) El dominio de la función es $IR-\{0\}$ y por ser una función racional solo es discontinua en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x+1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+1}{x} = -\infty$$

Por lo tanto la recta de ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical.

Como $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x} = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{x} = -\infty$ no hay asíntota horizontal.

Ahora: $\frac{x^2+x+1}{x} = x+1+\frac{1}{x}$ y dado que si $x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0$ luego $f(x)$ se aproxima a $y = x+1$, entonces la recta de ecuación $y = x+1$ es una asíntota inclinada.

b) Intervalos de monotonía y puntos extremos

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

f es creciente en $\left]-\infty,-1\right]$ y $\left[1,+\infty\right[$

f es decreciente en $\left[-1,0\right[$ y $\left]0,1\right]$

El valor máximo local es -1 y lo alcanza en $x = -1$: $(-1,-1)$

El valor mínimo local es 3 y lo alcanza en $x = 1$: $(1,3)$

c) Concavidad y puntos de inflexión

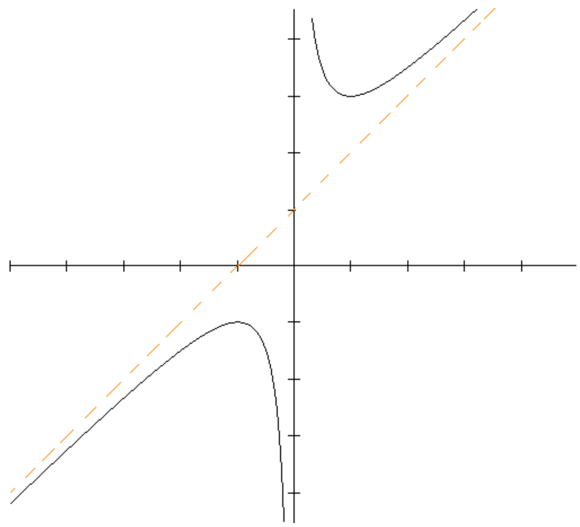
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

f es cóncava hacia arriba $\left]0,+\infty\right[$

f es cóncava hacia abajo $\left]-\infty,0\right[$

No hay puntos de inflexión.

d)



-fin-