UNIVERSIDAD DE COSTA RICA Sábado 9 de octubre del 2010
ESCUELA DE MATEMÁTICA MA-1001 Cálculo 1
PROYECTO MATEM - 2010 Tercer Examen Parcial

Solucionario

I) Calcule las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx$ (8 puntos)

Calculemos la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx = \int \frac{x-3}{x^2(x+1)}\,dx$

Se calculan las constantes *A*, *B* y *C* para obtener una expresión algebraica equivalente en sus fracciones parciales:

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

donde debe darse que $x-3 = Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2$,

y entonces $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B=1 \\ B=-3 \end{cases}$, por lo que $\begin{cases} B=-3 \\ A=4 \\ C=-4 \end{cases}$

o bien, $\begin{cases} \text{para } x=0: \ -3=B \\ \text{para } x=-1: \ -4=C \\ \text{para } x=1: \ -2=2A+-3\cdot 2+-4 \Rightarrow A=4 \end{cases}$

Así, $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{4}{x}+\frac{-3}{x^2}+\frac{-4}{x+1}\right)dx = 4\ln|x| + 3\cdot\frac{1}{x} - 4\ln|x+1| + C$

Retomando la integral definida:

$$\int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx = \left(4\ln|x| + \frac{3}{x} - 4\ln|x+1|\right)\Bigg|_1^2 = \left(4\ln 2 + \frac{3}{2} - 4\ln 3\right) - \left(3 - 4\ln 2\right)$$

$$= 4\ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2}$$

2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^{\operatorname{sen} x}}\,dx$ (6 puntos)

$$= \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{e^{\operatorname{sen} x}}\,dx$$

Tomando la sustitución $y = \text{sen}\, x$, $dy = \cos x\, dx$ se tiene $= 2\displaystyle\int \frac{y}{e^y}\, dy$

$$= 2\int e^{-y} \cdot y\, dy$$

Utilizando el método de integración por partes, tomando $\begin{matrix} u = y & du = dy \\ dv = e^{-y}dy & v = -e^{-y} \end{matrix}$

se obtiene $2\displaystyle\int e^{-y} \cdot y\, dy = 2\left(-ye^{-y} + \int e^{-y}dy\right) = 2\left(-ye^{-y} - e^{-y}\right) + C$

$$= -2\, \text{sen}\, x\, e^{-\,\text{sen}\, x} - 2e^{-\,\text{sen}\, x} + C$$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}\, dx$ (7 puntos)

$$\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}\, dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\, dx + \int \frac{5}{x^2+2x+5}\, dx$$

Para la primera de estas integrales se puede tomar la sustitución $\begin{matrix} u = x^2+2x+5 \\ du = \left(2x+2\right)\, dx \end{matrix}$

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C$$

Para la segunda, completando cuadrados en el denominador,
$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = \left(x+1\right)^2+4$ se obtiene la forma para aplicar arctangente

$$\int \frac{5}{\left(x+1\right)^2+4}\, dx = \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

Así, $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}\, dx = \ln\left|x^2+2x+5\right| + \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

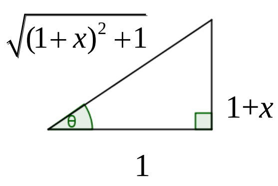
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+(1+x)^2}}\, dx$ (6 puntos)

Se puede aplicar la sustitución $u = a \cdot \tan\theta$ donde $\begin{matrix} a = 1 \\ u = 1+x \end{matrix}$, entonces $\begin{matrix} 1+x = \tan\theta \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{matrix}$

Así, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+(1+x)^2}}\, dx = \int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\, d\theta$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{(1+x)^2+1} + (1+x)\right| + C$$



5. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ (7 puntos)

Con la sustitución $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, se tiene $\operatorname{sen} x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx=\frac{2}{1+u^2}du$

Entonces $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx=\int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{1+u^2+1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$

$$=\int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=\int \frac{1-u^2}{1+u^2}du=\int \frac{1-\left(u^2+1-1\right)}{1+u^2}du=\int \frac{2-\left(u^2+1\right)}{1+u^2}du$$

$$=\int \frac{2}{1+u^2}du-\int du=2\arctan u-u+C=2\cdot\frac{x}{2}-\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C=x-\tan\frac{x}{2}+C$$

6. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$ (5 puntos)

Calculemos la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$.

Tomando $u=\ln x$, $du=\frac{1}{x}dx$ se obtiene $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$

$$=\operatorname{arcsen} u+C=\operatorname{arcsen}\left(\ln x\right)+C$$

Ahora, considerando la integral definida,

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx=\operatorname{arcsen}\left(\ln x\right)\Big|_1^e=\operatorname{arcsen}\,1-\operatorname{arcsen}\,0=\frac{\pi}{2}$$

7. **a.** Calcule $\displaystyle\int \ln t\;dt$ (3 puntos)

Utilizando el método de integración por partes, tomando
$$\begin{array}{ll} u=\ln t & du=\frac{1}{t}dt \\ dv=dt & v=t \end{array}$$

se obtiene $\displaystyle t\ln t-\int t\cdot\frac{1}{t}dt=t\ln t-t+C$

b. Utilice el resultado de la integral anterior para calcular $\int \sec^2 x \ \ln(\tan x) \ dx$

(3 puntos)

Tomando $t = \tan x$, $dt = \sec^2 x \ dx$ se obtiene $\int \ln t \ dt = t \ln t - t + C$

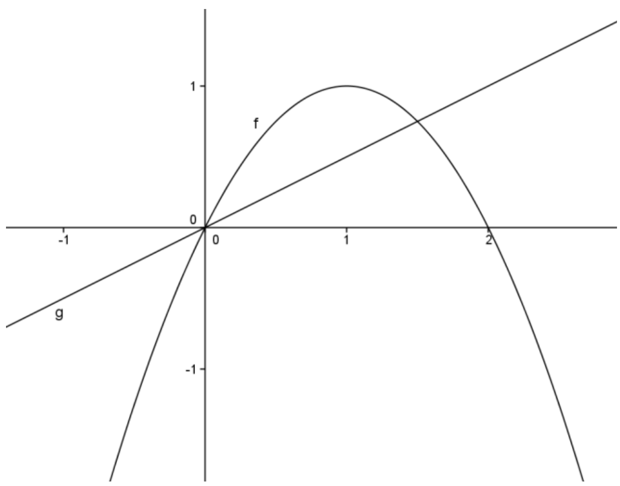
Así, $\int \sec^2 x \ \ln(\tan x) \ dx = \tan x \ln(\tan x) - \tan x + C$

II) Resuelva los problemas siguientes

8. Considere las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x/2$.

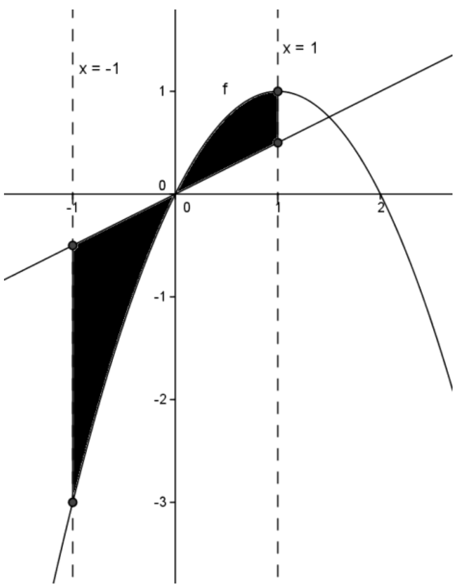
a. Grafique en un mismo plano cartesiano las funciones anteriores.

(2 puntos)



b. Sombree la región limitada por las gráficas de las funciones f y g entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$ y calcule su área.

(6 puntos)



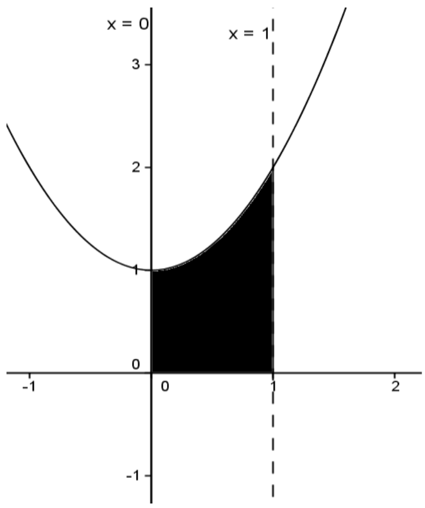
$$A = \int_{-1}^{0} \left[\frac{x}{2} - \left(-x^2 + 2x\right) \right] dx + \int_{0}^{1} \left[\left(-x^2 + 2x\right) - \frac{x}{2} \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x^2 - \frac{3x}{2} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(-x^2 + \frac{3x}{2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} \right) \Bigg|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{4} \right) \Bigg|_{0}^{1}$$

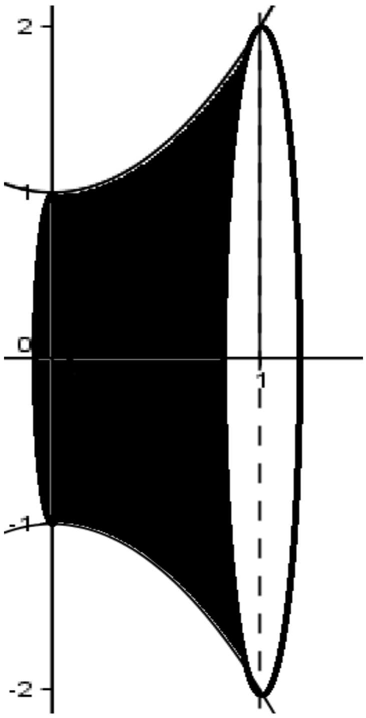
$$= 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{4} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right) - 0 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

9. Considere las rectas $y=0$, $x=0$, $x=1$ y la curva dada por $y=x^2+1$.



a. Dibuje en un mismo plano cartesiano la región limitada por los gráficos de la curva y las rectas anteriores.

(2 puntos)



b. Haga un esbozo del sólido obtenido al girar dicha región en torno al eje *x*.

(2 puntos)

c. Calcule el volumen del sólido.

(4 puntos)

$$V=\pi\int_0^1 \left(x^2+1\right)^2 dx=\pi\int_0^1 \left(x^4+2x^2+1\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{28}{15}\pi$$