UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO MATEM – 2011

Sábado 15 de octubre del 2011
Tercer Examen Parcial Cálculo I
Tiempo Probable: 3 horas

Solucionario

I) Calcule las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$ (8 puntos)

Tomando $u = e^x - 1$, $du = e^x dx$ y $e^x + 3 = u + 4$, sus límites de integración con respecto a la variable u son: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = \ln 5 \Rightarrow u = 4 \end{cases}$

Por lo tanto, la integral es equivalente a: $\displaystyle\int_0^4 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{u+4}\,du$

Consideremos ahora $u = t^2$, $du = 2t\ dt$, por lo que sus límites de integración con respecto a la variable t son: $\begin{cases} u = 0 \Rightarrow t = 0 \\ u = 4 \Rightarrow t = 16 \end{cases}$

Así tenemos: $\displaystyle\int_0^{16} \frac{2t^2}{t^2+4}\,dt = 2\int_0^{16} \frac{t^2+4-4}{t^2+4}\,dt = 2\int_0^{16} dt - 8\int_0^{16} \frac{1}{t^2+4}\,dt$

$$= 2t\Big|_0^{16} - 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{16} = (32-0) - 4(\arctan 8 - \arctan 0) = 32 - 4\arctan 8$$

2. $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,dx$ (8 puntos)

Vamos a integrar por partes tomando $\begin{cases} u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x}dx \\ dv = \cos(2\pi x)dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi x) \end{cases}$

Se obtiene entonces $\displaystyle\frac{1}{2\pi}e^{-2x}\operatorname{sen}(2\pi x)\Big|_0^1 + \frac{2}{2\pi}\int_0^1 e^{-2x}\operatorname{sen}(2\pi x)\,dx$

Al considerar nuevamente partes para la integral, tomando ahora

$$\begin{cases} u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x}dx \\ dv = \operatorname{sen}(2\pi x)dx \Rightarrow v = \dfrac{-1}{2\pi}\cos(2\pi x) \end{cases}$$

Se obtiene: $\dfrac{1}{2\pi}\left(e^{-2}\cdot 0 - 1\cdot 0\right) + \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{-1}{2\pi}e^{-2x}\cos(2\pi x)\Big|_0^1 - \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,dx\right]$

$$= 0 + \frac{-1}{2\pi^2}\left(e^{-2}-1\right) - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,dx$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2\pi^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right) - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,dx$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{\pi^2}\right)\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2}\right)\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,dx = \frac{e^2-1}{2\pi^2 e^2}$$

$$\therefore \int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,dx = \frac{e^2-1}{2e^2\left(\pi^2+1\right)}$$

3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}\,dx$ (6 puntos)

Tomando $y = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{x}\right)$, $dy = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2dy = \dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}dx$

Se obtiene $\displaystyle\int 2y\,dy = 2\cdot\frac{y^2}{2} + C = \left(\operatorname{arcsen}\sqrt{x}\right)^2 + C$

4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$ (6 puntos)

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x\cdot\cos^4 x}\,dx = \int \tan^2 x\cdot\sec^4 x\,dx = \int \tan^2 x\cdot\left(1+\tan^2 x\right)\cdot\sec^2 x\,dx$$

Tomando $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\,dx$

Se obtiene: $\int (u^2+u^4)\,du \quad = \frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C = \frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x + C$

5. $\int \frac{7x-5}{x^2-x-2}\,dx$ (6 puntos)

$$=\int \frac{7x-5}{(x-2)(x+1)}\,dx$$

Observe que el integrando se puede escribir, con un A y un B adecuados, de la siguiente forma:

$$\frac{7x-5}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

donde $7x-5 = A(x+1)+B(x-2) = (A+B)x+(A-2B)$

Por lo tanto, $\begin{cases} A+B=7 \\ A-2B=-5 \end{cases}$

De donde $3B=12 \Rightarrow B=4$ y $A=7-4=3$

Así $\int \frac{7x-5}{(x-2)(x+1)}\,dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{4}{x+1}\,dx$

$$= 3\ln|x-2| + 4\ln|x+1| + C$$

6. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}$ (10 puntos)

Completando cuadrados en el subradical se obtiene:

$$-x^2+2x = -(x^2-2x) = -(x^2-2x+1-1) = -\left[(x-1)^2-1\right] = 1-(x-1)^2$$

Se tiene entonces, $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-(x-1)^2}}$

Tomando $x-1=\operatorname{sen}\theta$, $dx=\cos\theta\,d\theta$

Se obtiene: $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{1+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta$

Ahora, considerando $u=\tan\frac{\theta}{2}$ tenemos $\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ y $d\theta = \frac{2}{1+u^2}\,du$

Así, la integral en términos de u es: $\displaystyle\int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du$

$$=\int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{1+u^2+1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du=\int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du=\int \frac{1-u^2}{1+u^2}\,du$$

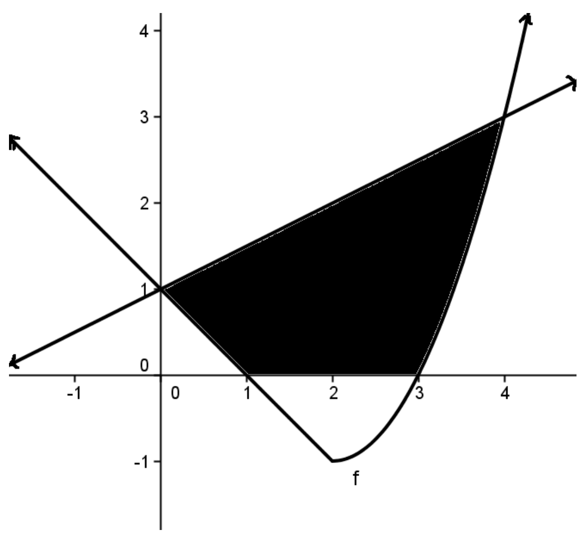
$$=\int \left(-1+\frac{2}{1+u^2}\right)du \quad =-u+2\arctan u+C=-\tan\frac{\theta}{2}+2\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+C$$

$$=-\tan\frac{\theta}{2}+\theta+C \quad =-\tan\left(\frac{\operatorname{arcsen}(x-1)}{2}\right)+\operatorname{arcsen}(x-1)+C$$

II) Utilice la información a continuación para responder las siguientes preguntas

7. Considere la recta determinada por la ecuación $x-2y+2=0$ y la función f definida en $\mathbb{R}$ por el criterio $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3\,, & \text{si } x\geq 2 \\ -x+1\,, & \text{si } x<2 \end{cases}$

a. Dibuje en un mismo plano cartesiano la región comprendida por las gráficas de la recta, la función f y el eje x. **(5 puntos)**



Note que las intersecciones entre la recta y la función f son (4, 3) y (0, 1). Además, las intersecciones de f con el eje x son (1, 0) y (3, 0).

Además, la ecuación de la recta $x-2y+2=0$ es equivalente a: $y=\dfrac{x}{2}+1$

b. Calcule, utilizando integrales, el área ilustrada en el punto anterior. (6 puntos)

$$A=\int_0^4\left(\frac{x}{2}+1\right)dx-\int_0^1(-x+1)\,dx-\int_3^4\left(x^2-4x+3\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Big|_0^4-\left(\frac{-x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+3x\right)\Big|_3^4$$

$$=(8-0)-\left(\frac{1}{2}-0\right)-\left(\frac{64}{3}-32+12-9+18-9\right)=\frac{15}{2}-\frac{4}{3}=\frac{37}{6}$$

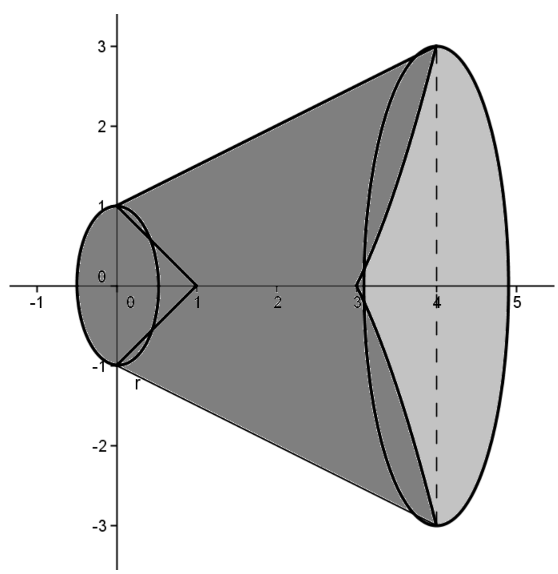
El área es aproximadamente 6,17 unidades al cuadrado.

Observe que otra forma de plantear el área es la siguiente:

$$A=\int_0^1\left[\left(\frac{x}{2}+1\right)-(-x+1)\right]dx+\int_1^3\left(\frac{x}{2}+1\right)dx+\int_3^4\left[\left(\frac{x}{2}+1\right)-\left(x^2-4x+3\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{3x}{2}\,dx+\int_1^3\left(\frac{x}{2}+1\right)dx+\int_3^4\left(-x^2+\frac{9x}{2}-2\right)dx$$

c. Haga un esbozo del sólido obtenido al girar dicha región alrededor del eje *x*. (3 puntos)



d. Calcule el volumen del sólido. **(6 puntos)**

$$V=\pi\left[\int_0^4\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 dx-\int_0^1(-x+1)^2 dx-\int_3^4\left(x^2-4x+3\right)^2 dx\right]$$

$$=\pi\left[\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}+x+1\right)dx-\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)dx-\int_3^4\left(x^4+16x^2+9-8x^3+6x^2-24x\right)dx\right]$$

$$=\pi\left[\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}+x+1\right)dx-\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)dx-\int_3^4\left(x^4-8x^3+22x^2-24x+9\right)dx\right]$$

$$=\pi\left[\left(\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^4-\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{22x^3}{3}-12x^2+9x\right)\Bigg|_3^4\right]$$

$$=\pi\left[\left(\frac{16}{3}+8+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)-\left(\frac{1024}{5}-512+\frac{1408}{3}-192+36\right)+\left(\frac{243}{5}-162+198-108+27\right)\right]$$

$$=\pi\left[\left(\frac{52}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{92}{15}\right)+\left(\frac{18}{5}\right)\right]$$

$$=\frac{217}{15}\pi$$

El volumen del sólido es aproximadamente 45,425 unidades al cubo.