Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática

Proyecto MATEM 2012

http://matem.emate.ucr.ac.cr/

tel. (506) 2511-4528

SOLUCIÓN III EXAMEN PARCIAL CÁLCULO I/ 12-09-2012

1. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto $(1,3)$ es $y = x + 2$, además se tiene que $\frac{d^2 f}{dx^2} = 6$. De acuerdo con la información, determine $f(x)$. *(6 puntos)*

Como la recta a la pendiente en (1,3) es $y = x + 2$ entonces

$f'(1) = 1$, pues la recta tiene pendiente $m = 1$

Luego

$$f''(x) = 6 \Rightarrow f'(x) = 6x + C$$
$$\Rightarrow 1 = 6 \cdot 1 + C$$
$$\Rightarrow 1 - 6 = C$$
$$\Rightarrow C = -5$$

Tenemos

$$P'(x) = 6x - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = \int (6x - 5)\,dx$$
$$= 6\frac{x^2}{2} - 5x + D$$
$$f(x) = 3x^2 - 5x + D$$

Pero

$f(1)=3$

$\Rightarrow 3=3(1)^2-5\cdot 1+D$

$3=3-5+D$

$0=-5+D$

$D=5$

$\therefore\ f(x)=3x^2-5x+5$

2. Calcule las siguientes integrales: (*5 puntos cada una)*

(a) $\int \frac{3x}{\sqrt{5-5x^2}}\ dx$ **(b)** $\int (x-3)^9 x^3\ \ dx$ **(c)** $\int \frac{\csc(3x)\cot(3x)}{[7+\csc(3x)]^3}\ dx$

a) $\int \frac{3x}{\sqrt{5-5x^2}}dx$ $\quad u=5-5x^2$

$du=-10x\ dx$

$$-\frac{3}{10}\int \frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{3}{10}\cdot 2\sqrt{u}+C$$

$$=-\frac{3}{5}\sqrt{5-5x^2}+C$$

b) $\int (x-3)^9 x^3 dx$ $\quad u=x-3$

$du=dx$

$$=\int u^9 (x+3)^3\, du$$

$$=\int u^9\left(u^3+3u^2 3+3u9+27\right)du$$

$$=\int u^{12}+9u^{11}+27u^{10}+27u^9 du$$

$$=\frac{u^{13}}{13}+\frac{9u^{12}}{12}+\frac{27u^{11}}{11}+\frac{27u^{10}}{10}+C$$

$$=\frac{(x-3)^{13}}{}+\frac{9(x-3)^{12}}{12}+\frac{27(x-3)^{11}}{11}+\frac{27(x-3)^{10}}{10}+C$$

c) $\int \dfrac{csc(3x)\cdot cot(3x)}{[7+csc(3x)]^3}$

$$v = 7 + csc(3x)$$
$$dv = -cot(3x)\cdot csc(3x)\cdot 3dx$$
$$-\frac{1}{3}dv = cot(3x)csc(3x)dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v^3}$$
$$= -\frac{1}{3}\frac{v^{-2}}{-2} + C$$
$$= \frac{1}{6}\left(7+u\right)^{-2} + C$$
$$= \frac{1}{6}\left[7+csc(3x)\right]^{-2} + C$$

3. Considere la función f tal que $f(x) = \dfrac{\int_{3x^2}^{3} \frac{1}{1+u^4}du}{x}$. De acuerdo con la información, calcule $\dfrac{df}{dx}$ cuando $x = 1$. *(5 puntos)*

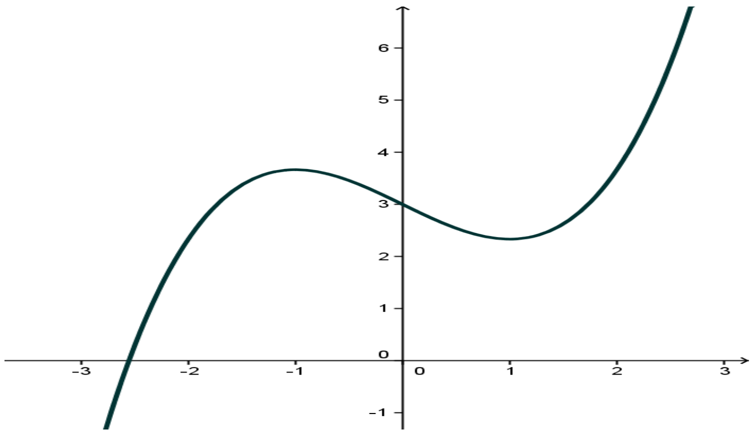
$$f(x) = \frac{\int_{3x^2}^{3} \frac{1}{1+u^4}du}{x^2} \qquad \frac{df}{dx}\ en\ x = 1$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{1+\left(3x^2\right)^4}6x\cdot x + \int_{3}^{3x^2}\frac{1}{1+u^4}du}{x^2}$$

$$\frac{-\frac{1}{1+81+x^8}6x^2\int_{3}^{3x^2}\frac{1}{1+u^4}du}{1^2} = -\frac{6}{82} = -\frac{3}{41}$$

4. Una parte de la gráfica de la curva $y = \frac{x^3}{3} - x + 3$ está representado en la siguiente figura:

.



Con base en la información anterior, determine aproximadamente el área acotada por la gráfica de la curva y el eje de las abscisas, en el intervalo $[-2,1]$, utilizando una partición de ese intervalo en cinco partes iguales. Utilice la suma superior. *(6 puntos)*

Como $\Delta x = \frac{3}{5}$

La partición con $n = 5$ sería:

$-2 + \frac{3}{5} = \frac{-1}{5}$

$\frac{-7}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-4}{5}$

$\frac{-4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-1}{5}$

$\frac{-1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

Calculando las imágenes tenemos que:

$f\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{1307}{375}$

$f\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{1361}{375}$

$$f\left(\frac{-1}{5}\right)=\frac{1199}{375}$$
$$f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{983}{375}$$
$$f(1)=\frac{7}{3}$$

$$A\approx\frac{3}{5}\left(\frac{1307}{375}+\frac{1361}{375}+\frac{1199}{375}+\frac{983}{375}+\frac{7}{3}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{229}{15}=\frac{229}{25}\approx 9.16$$
$$\Rightarrow A\approx 9.16$$

5. Considere las funciones:

$f:\left[0,\sqrt{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ $\quad$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x$ $\quad$ $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2$

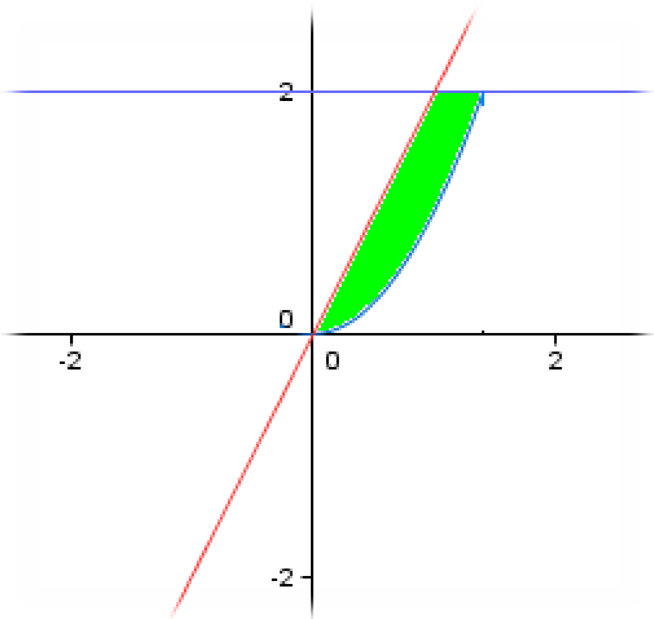
Con base en la información anterior:

(a) Represente en el mismo plano cartesiano las graficas de f, g y h. *(3 puntos)*

(b) Sombree la región limitada por las gráficas anteriores. *(1 punto)*

(c) Calcule el área de la región definida en la parte anterior. *(5 puntos)*

a) y b)



c. Área:

$$A=\int_0^1\left(2x+x^2\right)dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)dx$$

c) $= x^2-\dfrac{x^3}{3}\int_0^1 \quad +2x-\dfrac{x^3}{3}\int_1^{\sqrt{2}}$

$$=\frac{4\sqrt{2}-3}{3}$$

ó

$$A=\int_0^2\left(\sqrt{y}-\frac{y}{2}\right)dy$$

c) $=\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\dfrac{y^2}{4}\int_0^2 \quad =\dfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}-1$

$$=\frac{4\sqrt{2}-3}{3}$$

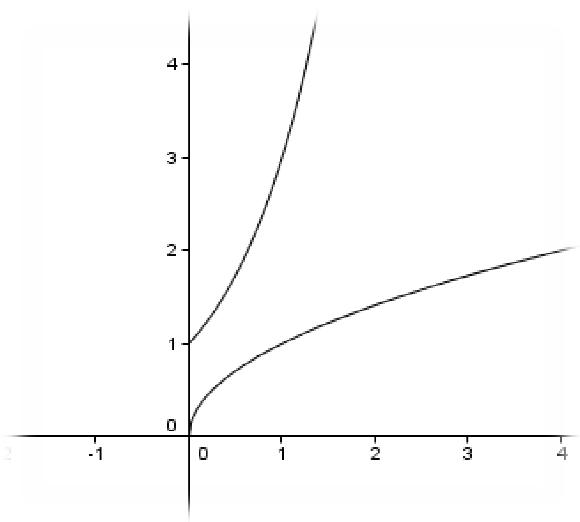
6. En cada caso realice lo que se le solicita: (*8 puntos)*

(a) Dibuje la región limitada por la gráfica de las curvas $y=\sqrt{x}$ y $y=3^x$ en $[0,3]$.

(b) Realice un esbozo del sólido que se genera al hacer girar la región anterior en torno al eje x.

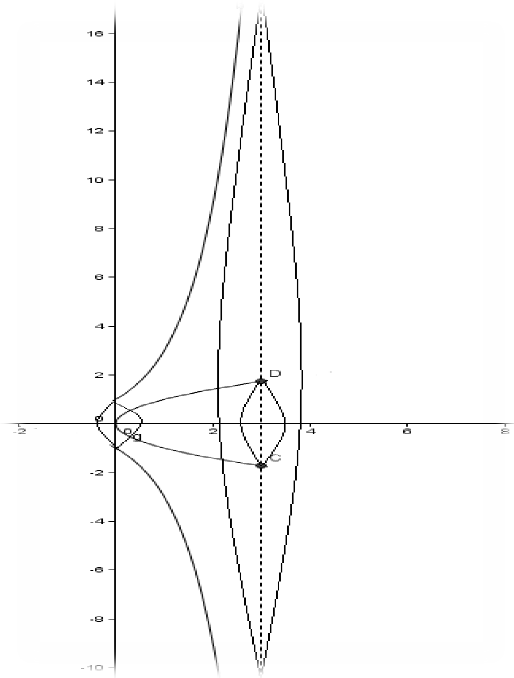
(c) Calcule el volumen del sólido.

a.



$$\int_0^1 \left(2x - x^2\right)dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right)dx$$
$$= x^2 - \frac{x^3}{3}\int_0^1 \quad + 2x - \frac{x^3}{3}\int_1^{\sqrt{2}}$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{3} - 2 + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} - 1$$

b.



$$\sqrt{x} = 3^x$$
$$\Leftrightarrow x = 3^{2x}$$
$$log_3 x = 2x$$
$$log_3 x - 2x = 0$$

c) volumen del solido

$$V = V_{grande} - V_{pequeño}$$

$$V = \pi\int_0^3 (3x)^2\, dx - \pi\int_0^3 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$V = \pi\int_0^3 9^x\, dx - \pi\int_0^3 x dx$$

$$= \pi\left[\frac{9^x}{ln 9}\int_0^3 \quad - \frac{x^2}{2}\int_0^3 \quad\right]$$

$$= \pi\left[\frac{729-1}{ln 9} - \left(\frac{9-0}{2}\right)\right]$$

$$= \pi\left[\frac{728}{ln 9} - \frac{9}{2}\right]$$