Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CUARTO EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO

Miércoles 9 de octubre de 2013

INSTRUCCIONES

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- **Este examen es de desarrollo, por lo que deberá ser resuelto en el cuaderno de examen**, **y debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada ítem.
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de 3 ítemes y un total de 52 puntos.**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas**.

1. Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int_1^8 \frac{dx}{9\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}}$ (5 puntos)

b. $\displaystyle\int e^{2x}\cos(x)\,dx$ (6 puntos)

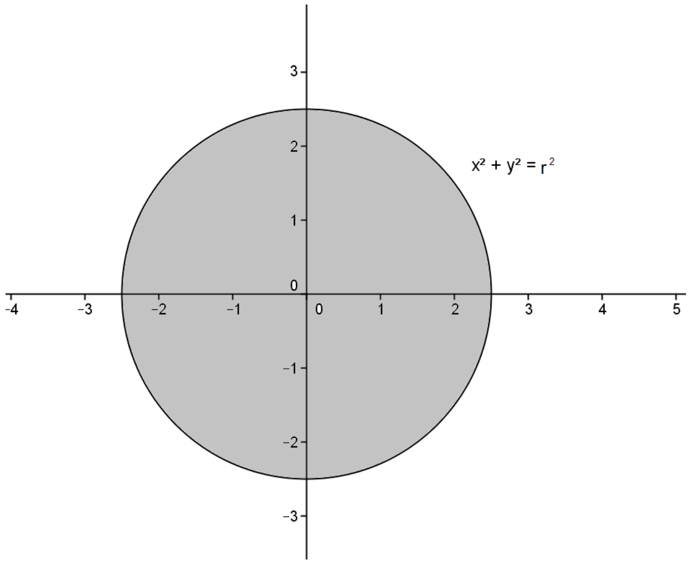
c. $\displaystyle\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ (5 puntos)

d. $\displaystyle\int \frac{xe^{x^2}}{e^{2x^2}-2e^{x^2}-3}\,dx$ (6 puntos)

e. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3+x^2+2x+5}{x^3+x}\,dx$ (8 puntos)

f. $\displaystyle\int \frac{1}{6+5\cos x}\,dx$ (4 puntos)

2. La ecuación de una circunferencia de radio r cuyo centro es el origen del sistema de coordenadas es $x^2 + y^2 = r^2$. Use integrales para comprobar que el área del círculo determinado por ella es $A = \pi r^2$. (6 puntos)



3. Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. En caso de que converjan calcule su valor.

a. $$\int_1^e \frac{1}{x \ln x}\, dx$$ (6 puntos)

b. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx$$ (6 puntos)

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CUARTO EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO

----SOLUCIÓN----

Miércoles 9 de octubre de 2013

1. Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int_1^8 \frac{dx}{9\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}}$ (5 puntos)

Solución

$$\int_1^8 \frac{dx}{9\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}}$$

$$x=u^3$$

$$dx=3u^2du$$

$$\int_1^8 \frac{dx}{9\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}}=\int_1^2 \frac{3u^2du}{9u^2+u^4}=3\int_1^2 \frac{du}{9+u^2}=\arctan\frac{u}{3}\Big|_1^2=\arctan\frac{2}{3}-\arctan\frac{1}{3}$$

b. $\displaystyle\int e^{2x}\cos(x)\,dx$ (6 puntos)

Solución

Esta integral indefinida se puede resolver por partes de la siguiente manera:

$$f(x)=e^{2x}\to f'(x)=2e^{2x}$$
$$g'(x)=\cos(x)\to g(x)=\operatorname{sen}(x)$$

$$I=\int e^{2x}\cos(x)\,dx=e^{2x}\operatorname{sen}(x)-2\int e^{2x}\operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$f(x)=e^{2x}\to f'(x)=2e^{2x}$$
$$h'(x)=\operatorname{sen}(x)\to h(x)=-\cos(x)$$

$$I = e^{2x}\operatorname{sen}(x) - 2\left[-e^{2x}\cos(x) - \int -2e^{2x}\cos(x)\,dx\right]$$
$$I = e^{2x}\operatorname{sen}(x) + 2e^{2x}\cos(x) - 4I$$
$$5I = e^{2x}\operatorname{sen}(x) + 2e^{2x}\cos(x)$$
$$I = \frac{e^{2x}\operatorname{sen}(x) + 2e^{2x}\cos(x)}{5} + C$$

c. $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ (5 puntos)

Solución

$$\begin{aligned}
&\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx \\
&= \int \frac{1+\cos(x)}{2}\,\frac{1-\cos(x)}{2}\,dx \\
&= \int \frac{1-\cos^2(x)}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{8}\int 1-\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right] + C = \frac{1}{8}\left[x - \operatorname{sen}(x)\cos(x)\right] + C
\end{aligned}$$

d. $\int \frac{xe^{x^2}}{e^{2x^2} - 2e^{x^2} - 3}\,dx$ (6 puntos)

Solución

Si se hace la sustitución $u = e^{x^2}$ se tiene que $du = 2xe^{x^2}\,dx$ y la integral es equivalente a

$$\frac{1}{2}\int \frac{2xe^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2 - 2e^{x^2} - 3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2 - 2u - 3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u-3)(u+1)}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{A}{u-3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{B}{u+1}\,dx = \frac{A}{2}\ln|u-3| + \frac{B}{2}\ln|u+1| + C$$

Falta determinar los valores de A y B :

$$\frac{A}{u-3}+\frac{B}{u+1}=\frac{1}{(u-3)(u+1)}$$

$$\frac{A(u+1)+B(u-3)}{(u-3)(u+1)}=\frac{1}{(u-3)(u+1)}$$

$$A(u+1)+B(u-3)=1$$

$$u=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

$$u=3 \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{xe^{x^2}}{e^{2x^2}-2e^{x^2}-3}dx=\frac{1}{8}\ln|u-3|-\frac{1}{8}\ln|u+1|+C=\frac{1}{8}\ln\left|e^{x^2}-3\right|-\frac{1}{8}\ln\left|e^{x^2}+1\right|+C$$

e. $\int \frac{x^4+2x^3+x^2+2x+5}{x^3+x}dx$ (8 puntos)

Solución

Como en el integrando se tiene una una expresión algebraica racional impropia, primero se debe dividir el polinomio del numerador entre el polinomio del denominador:

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+2x+5}{x^3+x}dx=\int\left(x+2+\frac{5}{x^3+x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+C_1+\int\frac{5}{(x^2+1)x}dx$$

Ahora falta calcular, mediante fracciones parciales, la siguiente integral :

$$\int\frac{5}{x(x^2+1)}dx=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{Bx+C}{x^2+1}dx$$

$$\frac{5}{x(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$$

$$5=Ax^2+A+Bx^2+Cx$$

$$\begin{cases} A=5 \\ B=-5 \\ C=0 \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$\int \frac{5}{x\left(x^2+1\right)}dx = 5\int \frac{1}{x}dx - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = 5\ln|x| - \frac{5}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C_2$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+2x+5}{x^3+x}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 5\ln|x| - \frac{5}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C$$

f. $\int \frac{1}{6+5\cos x}dx$ (4 puntos)

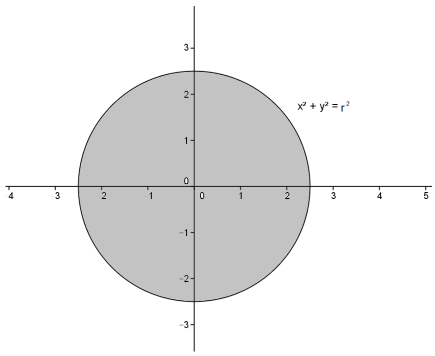
Solución

Se usa la sustitución: $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow x = 2\arctan(u) \rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}du \qquad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$$\int \frac{1}{5\cos x + 6}dx = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{5\frac{1-u^2}{1+u^2}+6}du = \int \frac{2}{5-5u^2+6+6u^2}du = 2\int \frac{1}{11+u^2}du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{11}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{11}}\right) + C$$

2. La ecuación de una circunferencia de radio r cuyo centro es el origen del sistema de coordenadas es $x^2 + y^2 = r^2$. Use integrales para comprobar que el área del círculo determinado por ella es $A = \pi r^2$. (6 puntos)



Solución

El área del círculo es igual a cuatro veces el área de la región limitada por la circunferencia en el primer cuadrante, donde $y > 0$ y $x > 0$.

Al despejar y en la ecuación de la circunferencia se obtiene: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Por lo tanto el área se puede calcular con la siguiente integral :

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Haciendo la sustitución trigonométrica
$$\begin{aligned} x &= r\,\text{sen}\,\alpha \\ dx &= r\cos(\alpha)\,d\alpha \\ \sqrt{r^2 - x^2} &= r\cos\alpha \\ \alpha &= \text{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right) \end{aligned}$$
se obtiene :

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\alpha\; r\cos(\alpha)\,d\alpha = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\alpha)\,d\alpha \\ &= 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2\alpha)\,d\alpha = 2r^2\left[\alpha + \text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2r^2\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi r^2 \end{aligned}$$

3. Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. En caso de que converjan calcule su valor.

a. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\ln x}\,dx$ (6 puntos)

Solución

Note que el integrando es una función continua en $[a, e]$ para cualquier valor de a entre 1 y e, pero que en $x = 1$ se presenta una discontinuidad infinta. Por lo tanto,

$$\int_1^e \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{a\to 1^+}\int_a^e \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

Si se hace la sustitución $u = \ln x$ se tiene que

$$\lim_{a\to 1^+}\int_a^e \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{a\to 1^+}\int_{\ln a}^1 \frac{1}{u}\,du = \lim_{a\to 1^+}\left[\ln 1 - \ln(\ln a)\right] = \lim_{a\to 1^+}\left[-\ln(\ln a)\right] = -\infty$$

Por lo tanto la integral diverge.

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ (6 puntos)

Solución

Como el integrando es una función continua en $\mathbb{R}$ se tiene que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{-|x|}\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-|x|}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{x}\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} e^{x}\Big|_a^0 - \lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty}\left(1-e^{a}\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1+1 = 2$$

Por lo tanto la integral converge a 2.