



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica

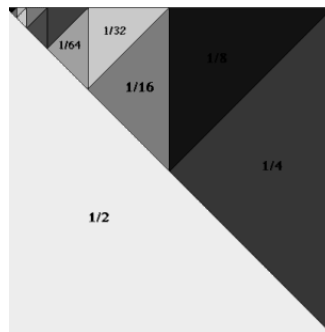


PRECÁLCULO  
-Décimo Año-

III EXAMEN PARCIAL 2014

Nombre: \_\_\_\_\_ código: \_\_\_\_\_

Colegio: \_\_\_\_\_



**Fórmula**

**1**

Sábado 4 de octubre de 2014

## **INSTRUCCIONES**

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (30 puntos) y la segunda es de desarrollo (20 puntos).
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En los ítems de selección, deberá rellenar con lápiz, en la hoja de respuestas, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente tinta indeleble.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

**PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 30 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. Si  $\log_3 \frac{1}{a} = -2$  entonces  $a$  es igual a

A) -6

B) 9

C)  $\frac{1}{9}$

D)  $\frac{1}{6}$

2. La gráfica de la función  $f$  definida en su dominio máximo, cuyo criterio está dado

por  $f(x) = \log_5(x-3)+2$ , es asíntota a la recta de ecuación

A)  $x = 3$

B)  $x = -3$

C)  $y = 2$

D)  $y = 0$

3. Para una función  $f$  definida en su dominio máximo, ¿cuál de los siguientes

criterios satisface que  $f$  sea estrictamente creciente?

A)  $f(x) = 2^{-x-3}$

B)  $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^{x-3}$

C)  $f(x) = -\ln x$

D)  $f(x) = \log_{0,3} x$

4. Si  $f$  es una función biyectiva con  $f(x) = 2^{x-3} + 1$  entonces  $f^{-1}(x) =$
- A)  $\log_2(x + 3) - 1$   
B)  $\log_2(x - 3) + 1$   
C)  $\log_2(x - 1) + 3$   
D)  $\log_2(x + 1) - 3$
5. El dominio máximo de la función definida por  $f(x) = \frac{\log(x+2)}{\log x}$  corresponde a
- A)  $]0, +\infty[ - \{1\}$   
B)  $] -2, +\infty[ - \{1\}$   
C)  $]0, +\infty[$   
D)  $] -2, +\infty[$
6. El ámbito de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 5^{-x} - 3$  corresponde a
- (A)  $] -\infty, -3[$   
(B)  $] -3, +\infty[$   
(C)  $] -\infty, 3[$   
(D)  $\mathbb{R}$
7. Considere las siguientes afirmaciones sobre la función  $f$  definida en su dominio máximo, cuyo criterio es  $f(x) = \log_n x$  con  $n > 1$
- I. es cóncava hacia abajo  
II. interseca al eje de las abscisas en el punto  $(1,0)$
- De las anteriores proposiciones, se cumplen con certeza
- A) solamente la II  
B) solamente la I  
C) ninguna  
D) ambas

8. Considere las siguientes afirmaciones

I.  $f(mn) = f(m)f(n)$

II.  $f(m+n) = f(m) + f(n)$

¿Cuáles se cumplen para cualquier función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma  $f(x) = a^x$  con

$a > 0, a \neq 1$  ?

- A) Solamente la II
- B) Solamente la I
- C) Ninguna
- D) Ambas

9. La expresión  $\log_a \left( \frac{1}{a} \right) - 16 \log_a \sqrt{a} + a^{\log_a 5}$  es igual a

- A) -4
- B) 0
- C)  $-5 + \log_a 5$
- D)  $-5 + \log_a 5$

10. La expresión  $\ln \left( \frac{x}{x-1} \right) + \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) - \ln(x^2 - 1)$  es igual a

- A)  $2 \ln(x-1)$
- B)  $\ln(x-1)^2$
- C)  $-2 \ln(x-1)$
- D)  $2 \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)$

11. El conjunto solución de la ecuación  $\log_3(3x+1) - \log_3(2x+3) = 2$  es

- A)  $\emptyset$
- B)  $\{13\}$
- C)  $\{-5\}$
- D)  $\left\{ -\frac{26}{15} \right\}$

12. Considere las siguientes inecuaciones:

I.  $\ln x < \ln 2$

II.  $5^x < 25$

¿Cuáles de ellas tienen como conjunto solución al intervalo  $]-\infty, 2[$  ?

- A) Solamente la II
- B) Solamente la I
- C) Ninguna
- D) Ambas

13. Considere la circunferencia cuyo centro es el punto de coordenadas  $(-2, -3)$  y que tiene 3 unidades de radio. ¿Cuál de las siguientes coordenadas corresponde a un punto exterior a esa circunferencia?

- A)  $(0, 0)$
- B)  $(0, -3)$
- C)  $(-2, 0)$
- D)  $(-3, -2)$

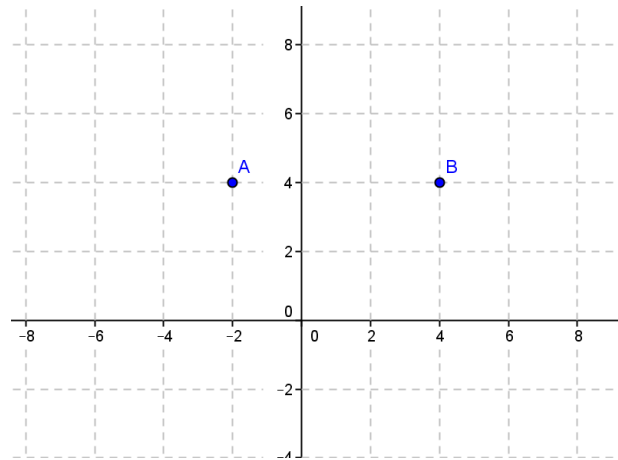
14. En un círculo de 2 dm de diámetro, toda cuerda de 1,6 dm de longitud se encuentra del centro de circunferencia a una distancia de

- A) 3 cm
- B) 6 cm
- C) 12 cm
- D)  $\sqrt{336}$  cm

15. De acuerdo con los datos de la figura, considere la circunferencia  $c_1$  de centro A cuyo radio mide 2 unidades y la circunferencia  $c_2$  de centro B cuyo radio mide 5 unidades.

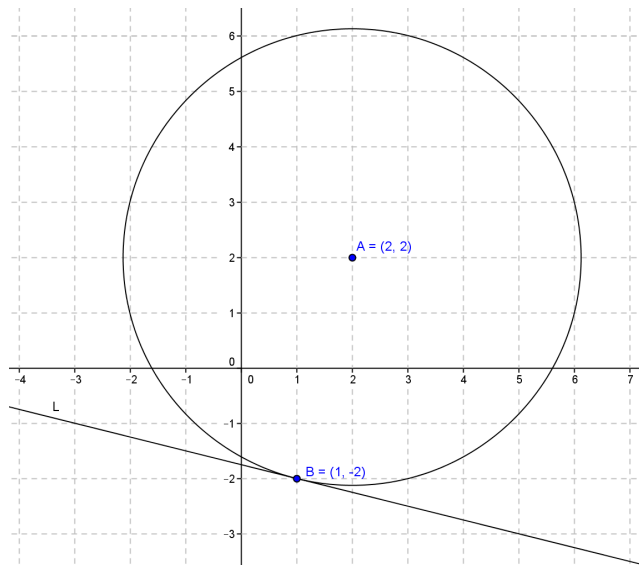
Se puede asegurar que  $c_2$  y  $c_1$  son

- A) tangentes exteriores
- B) tangentes interiores
- C) exteriores
- D) secantes



16. En la figura, L es la recta tangente en B a la circunferencia de centro A. ¿Cuál es la pendiente de L?

- A) 4
- B) -4
- C) 0,25
- D) -0,25



17. Considere las siguientes afirmaciones:

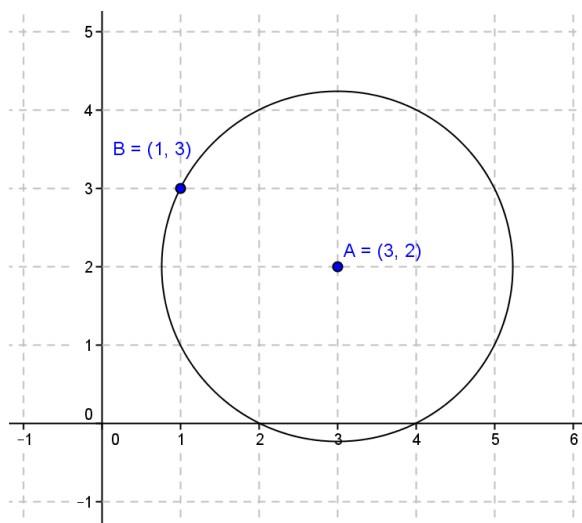
- I. En una misma circunferencia, un diámetro perpendicular a una cuerda la biseca.
- II. En una misma circunferencia, dos arcos comprendidos entre dos rectas paralelas son congruentes.
- III. La medida angular de un arco es igual a la medida del ángulo central que determina.

De ellas, son verdaderas

- A) únicamente I y II
- B) únicamente I y III
- C) únicamente II y III
- D) todas

18. De acuerdo con los datos de la figura adjunta en la cual A es el centro de la circunferencia que contiene a B, el área del círculo es

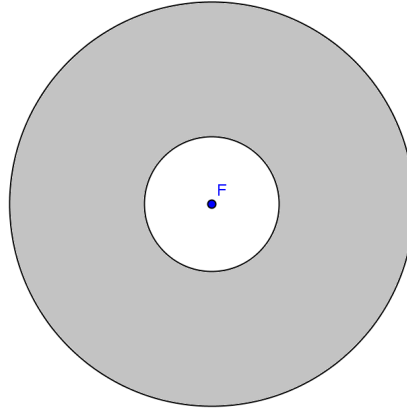
- A)  $5\pi (u.l.)^2$
- B)  $10\pi (u.l.)^2$
- C)  $25\pi (u.l.)^2$
- D)  $2\pi\sqrt{5} (u.l.)^2$





19. En la figura, F es el centro de ambas circunferencias cuyos radios están en la razón  $3:1$ . Si la longitud de la circunferencia mayor es  $12\pi$  cm entonces el área, en centímetros cuadrados, de la región sombreada es

- A)  $8\pi$
- B)  $32\pi$
- C)  $40\pi$
- D)  $315\pi$



20. Si el ángulo central de un polígono regular mide  $45^\circ$  entonces cada uno de sus ángulos internos mide

- A)  $45^\circ$
- B)  $90^\circ$
- C)  $135^\circ$
- D)  $1080^\circ$

21. Si se sabe que un cuadrilátero es rectángulo, para poder afirmar que es un polígono regular basta con verificar que también tiene

- A) las diagonales congruentes
- B) las diagonales perpendiculares
- C) los cuatro ángulos externos rectos
- D) los cuatro ángulos externos congruentes

22. Considere las siguientes afirmaciones:
- I. Desde cada vértice se pueden trazar 7 diagonales.
  - II. Cada ángulo externo mide  $36^\circ$
- ¿Cuáles de ellas son verdaderas para un decágono regular?
- A) Solamente la II
  - B) Solamente la I
  - C) Ninguna
  - D) Ambas
23. Considere un hexágono regular ABCDEF y analice las siguientes afirmaciones
- I.  $AD = AB + BC$
  - II.  $\square ABCD$  es un trapecio isósceles
- De ellas, son verdaderas
- A) Solamente la II
  - B) Solamente la I
  - C) Ninguna
  - D) Ambas
24. En un cuadrilátero regular el radio de la circunferencia inscrita mide 4cm, entonces la diagonal del cuadrado mide
- A) 4cm
  - B)  $4\sqrt{2}$  cm
  - C) 8cm
  - D)  $8\sqrt{2}$  cm

25. Si en un polígono regular de tres lados el radio mide  $10\text{ cm}$ , entonces tiene un perímetro de

A)  $40\sqrt{2}\text{ cm}$

B)  $30\sqrt{3}\text{ cm}$

C)  $30\sqrt{2}\text{ cm}$

D)  $60\sqrt{3}\text{ cm}$

26. Si el área de un hexágono regular es  $900\sqrt{3}\text{ cm}^2$  entonces su radio mide

A)  $60\text{ cm}$

B)  $40\text{ cm}$

C)  $10\sqrt{6}\text{ cm}$

D)  $15\sqrt{2}\text{ cm}$

27. El radio de la esfera circunscrita en un cubo de  $10\text{ cm}$  de arista mide

A)  $10\text{ cm}$

B)  $5\sqrt{2}\text{ cm}$

C)  $5\sqrt{3}\text{ cm}$

D)  $10\sqrt{3}\text{ cm}$

28. En un cono circular recto las medidas del radio de la base y la altura están en la razón  $3:4$ . Si la generatriz mide  $15$  cm entonces la el diámetro de la base mide
- A) 9 cm
  - B) 12 cm
  - C) 18 cm
  - D) 24 cm
29. La base de un prisma es un rectángulo cuyo ancho mide la mitad del largo. Si la altura del prisma es igual al ancho de la base y el volumen del prisma es  $432 \text{ cm}^3$ , entonces el perímetro de la base, en centímetros, corresponde a
- A) 6
  - B) 18
  - C) 36
  - D) 72
30. El volumen, en centímetros cúbicos, de una pirámide de  $18$  cm de altura, cuya base es un triángulo equilátero de  $8$ cm de lado es
- A) 768
  - B)  $64\sqrt{3}$
  - C)  $96\sqrt{3}$
  - D)  $192\sqrt{3}$



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



**TERCER EXAMEN PARCIAL 2014 - Sábado 4 de octubre**

Nombre completo: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

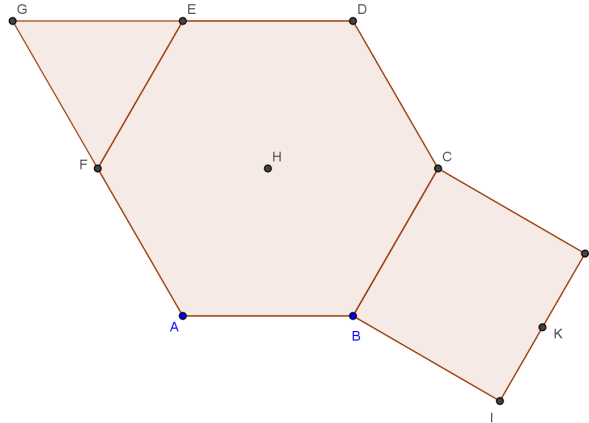
COLEGIO: \_\_\_\_\_

PREGUNTA	Puntos obtenidos
D1	
D2	
D3	
D4	
TOTAL	

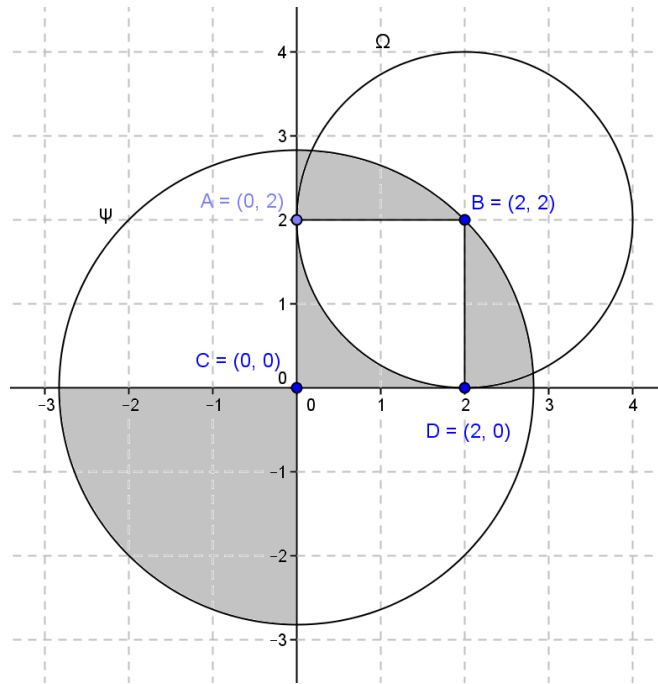
**SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 20 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (5 puntos) La figura corresponde a un croquis del piso de un salón de fiestas, el cual está compuesto por tres polígonos regulares. Si se sabe que la distancia del vértice G al punto medio K del lado  $\overline{IJ}$  es  $(6+9\sqrt{3})m$ , calcule el área de la región total.



2. (5 puntos) En la figura  $\Psi$  es la circunferencia de centro  $C$  que contiene al punto  $B$  y  $\Omega$  es la circunferencia de centro  $B$  que contiene a los puntos  $A$  y  $D$ . Determine el área de la región sombreada:



3. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$(3^{x^2-2} - 9)(2\log_4(x) - 3) = 0$$

4. (4 puntos) Resuelva el siguiente problema:

Un material radiactivo se coloca en un reactor nuclear. Debido a la desintegración, la cantidad  $A$  de  $mg$  presente  $t$  años después está dada por  $A(t) = 80 \cdot 2^{\frac{-t}{2}}$ . Calcule la cantidad de años que debe transcurrir para que se desintegre el 87,5% de la cantidad inicial.



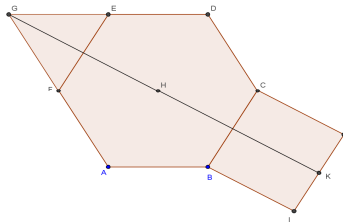
**SOLUCIONARIO****SELECCIÓN ÚNICA.**

1	B	11	A	21	B
2	A	12	A	22	D
3	B	13	A	23	D
4	C	14	B	24	D
5	A	15	D	25	B
6	B	16	D	26	C
7	D	17	D	27	C
8	C	18	A	28	C
9	A	19	B	29	C
10	C	20	C	30	C

**SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 20 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (5 puntos) La figura corresponde a un croquis del piso de un salón de fiestas, el cual está compuesto por tres polígonos regulares. Si se sabe que la distancia del vértice G al punto medio K del lado  $\overline{IJ}$  es  $(6+9\sqrt{3})m$ , calcule el área de la región total.

**Solución**

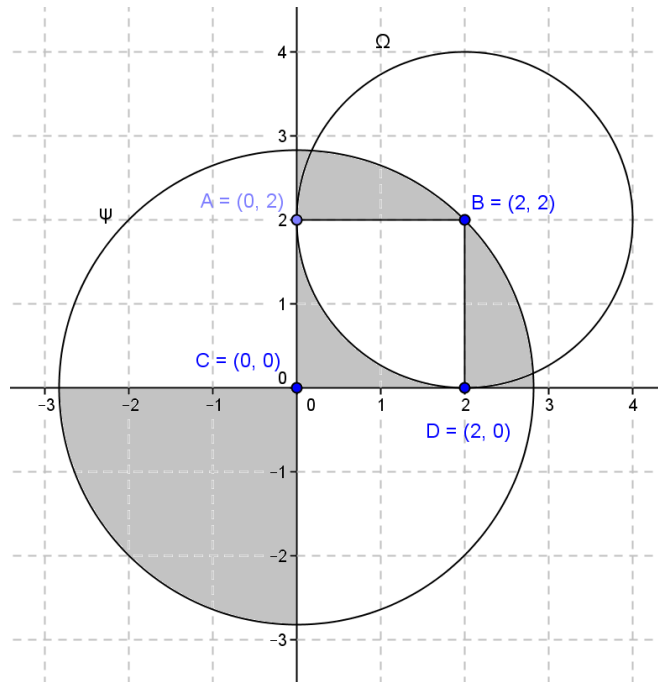
Sea  $x$  la medida de cada lado de los polígonos regulares. Entonces la medida de la altura del triángulo y de la apotema del hexágono es  $\frac{x}{2}\sqrt{3}$ . Por lo tanto

$$GK = 3 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{3} + x = 6 + 9\sqrt{3} \Rightarrow x \left( \frac{3\sqrt{3} + 2}{2} \right) = 3(3\sqrt{3} + 2)$$

$$\Rightarrow x \left( \frac{1}{2} \right) = 3 \Rightarrow x = 6$$

El área, en metros cuadrados, de la región está dada por  $A = 7 \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + x^2 = 63\sqrt{3} + 36 \approx 145,12$ .

2. (5 puntos) En la figura  $\Psi$  es la circunferencia de centro C que contiene al punto B y  $\Omega$  es la circunferencia de centro B que contiene a los puntos A y D. Determine el área de la región sombreada:



### Solución

El radio de la circunferencia menor es 2, por lo tanto el área del círculo menor es  $A_1 = 4\pi$

El radio de la circunferencia mayor es  $R = CB = 2\sqrt{2}$  por lo tanto el área del círculo mayor es  $A_2 = 8\pi$

El área de la región sombreada corresponde a la mitad del área del círculo mayor menos la cuarta parte del área del círculo menor, es decir:  $A_s = \frac{8\pi}{2} - \frac{4\pi}{4} = 3\pi \text{ (u.l.)}^2$

3. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$(3^{x^2-2} - 9)(2\log_4(x) - 3) = 0$$

### Solución

$$\begin{aligned} &(3^{x^2-2} - 9)(2\log_4(x) - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow &(3^{x^2-2} - 9 = 0 \vee 2\log_4(x) - 3 = 0) \wedge x > 0 \\ \Leftrightarrow &\left(3^{x^2-2} = 9 \vee \log_4(x) = \frac{3}{2}\right) \wedge x > 0 \\ \Leftrightarrow &\left(x^2 - 2 = 2 \vee x = 4^{\frac{3}{2}}\right) \wedge x > 0 \\ \Leftrightarrow &(x = \pm 2 \vee x = 8) \wedge x > 0 \\ &S = \{8, 2\} \end{aligned}$$

4. (4 puntos) Resuelva el siguiente problema:

Un material radiactivo se coloca en un reactor nuclear. Debido a la desintegración, la cantidad  $A$  de  $mg$  presente  $t$  años después está dada por  $A(t) = 80 \cdot 2^{\frac{-t}{2}}$ . Calcule la cantidad de años que debe transcurrir para que se desintegre el 87,5% de la cantidad inicial.

### Solución

La cantidad inicial es  $A(0) = 80 \cdot 2^0 = 80$  mg

Si se desintegra el 87,5% lo que quedan son 10 mg

$$\begin{aligned} 10 &= 80 \cdot 2^{\frac{-t}{2}} \\ \frac{1}{8} &= 2^{\frac{-t}{2}} \\ -3 &= -\frac{t}{2} \\ 6 &= t \end{aligned}$$

Deben transcurrir 6 años.