Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

PRECÁLCULO

-Décimo Año-

III EXAMEN PARCIAL 2013

Nombre: ________________________________ código: _______

Colegio: ____

Fórmula

1

Sábado 5 de octubre de 2013

INSTRUCCIONES

(A) **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

(B) Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

(C) Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (30 puntos), la segunda es de desarrollo (20 puntos).

(D) La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

(E) En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

(F) **En los ítemes de selección**, deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

(G) **En los ítemes de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente tinta indeleble.

(H) Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

(I) Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

(J) **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 30 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. La gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=5^{x-3}+2$ es asintótica a la recta de ecuación

(A) $x=3$

(B) $y=2$

(C) $x=-3$

(D) $y=-2$

2. Sobre la gráfica de la función $f(x)=\log(x+100)$ definida en su dominio máximo, considere las siguientes afirmaciones:

I. Interseca al eje Y en el punto $(0,2)$.

II. Interseca al eje X en el punto $(1,0)$.

De ellas, son verdaderas

(A) Solamente I

(B) Solamente II

(C) Ninguna

(D) Ambas

3. Si el punto de coordenadas $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ pertenece a la gráfica de la función definida por $f(x) = e^{k \ln x}$, entonces el valor de k es

(A) -2
(B) -1
(C) 1
(D) 2

4. Considere las funciones $g:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ y $h:]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = -\log(x)$ y $h(x) = \log(-x)$. Analice las siguientes afirmaciones para un número real positivo a:

I. $g(a^2) = -h(a^2)$

II. $g\left(\frac{1}{a}\right) = h(-a)$

De ellas, son verdaderas

(A) Solamente I
(B) Solamente II
(C) Ninguna
(D) Ambas

5. El dominio máximo de la función f definida por $f(x)=\dfrac{x}{1-\log x}$ es

(A) $]0,+\infty[-\{10\}$

(B) $]0,+\infty[$

(C) $\mathbb{R}-\{10\}$

(D) $\mathbb{R}-\{1\}$

6. La preimagen de $-\dfrac{3}{5}$ en la función dada por $g(x)=10\cdot 5^{x-1}-1$ es

(A) 2

(B) 1

(C) -1

(D) -2

7. Si se sabe que $\log_a b=c$ entonces $\log_{\sqrt{a}} b^2$ es igual a

(A) $2c$

(B) $4c$

(C) $4c^2$

(D) $2\sqrt{c}$

8. Si $9^{5y}=7$ entonces $\log_3 7$ es igual a

(A) $5y+2$

(B) $7y$

(C) $10y$

(D) $\dfrac{5y}{2}$

9. Si b, x, z son un números reales positivos tal que $b = \dfrac{x\sqrt{e}}{z+4}$ entonces $\ln b$ es igual a

(A) $\dfrac{\ln x + \frac{1}{2}}{\ln(z+4)}$

(B) $\dfrac{\frac{1}{2}\ln x}{\ln(z) + \ln 4}$

(C) $\ln x + \dfrac{1}{2} - \ln(z+4)$

(D) $\ln x + \dfrac{1}{2} - \ln(z) - \ln 4$

10. El conjunto solución de $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x-4} < \sqrt[5]{\dfrac{9}{49}}$ es

(A) $\left]-\infty, \dfrac{22}{5}\right[$

(B) $\left]-\infty, \dfrac{18}{5}\right[$

(C) $\left]\dfrac{18}{5}, +\infty\right[$

(D) $\left]\dfrac{22}{5}, +\infty\right[$

11. El conjunto solución de $\pi^x = e^x$ es

(A) $\{0\}$

(B) $\left\{\frac{\pi}{e}\right\}$

(C) $\left\{\log\frac{\pi}{e}\right\}$

(D) $\left\{\frac{\log e}{\log \pi}\right\}$

12. El conjunto solución de $2\log(x-1) = \log 9$ es

(A) $\{4,-2\}$

(B) $\left\{\frac{11}{2}\right\}$

(C) $\{2\}$

(D) $\{4\}$

13. El conjunto solución de $\log(x+10) \leq 1$ es

(A) $]-10,+\infty[$

(B) $]-\infty,0]$

(C) $]-10,0]$

(D) $\{0\}$

14. Considere las siguientes proposiciones referidas a una circunferencia de 5cm de radio:

I. La cuerda de mayor longitud mide 10 cm.

II. Una cuerda de 5 cm determina un arco de 60° .

De ellas, son verdaderas

(A) Solamente I
(B) Solamente II
(C) Ninguna
(D) Ambas

15. Considere dos circunferencias de centros A y B tangentes exteriores en C. Si sus áreas son 36π y 16π , respectivamente, entonces AB es igual a

(A) 2 cm
(B) 4 cm
(C) 10 cm
(D) 26 cm

16. Si dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de una circunferencia se intersecan en un punto P de tal forma que $AP = 4$ cm, $BP = 9$ cm y $CP = 2$ cm, entonces $\overline{CD}$ mide

(A) 20 cm
(B) 18 cm
(C) 13 cm
(D) 6,5 cm

17. La recta l es tangente en el punto T a la circunferencia de centro O y P es un punto de l que dista de O el doble de lo que dista de T. Si el diámetro de la circunferencia mide 6 cm entonces el área del ΔPOT es

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(B) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

(C) $6\sqrt{3}$

(D) $3\sqrt{3}$

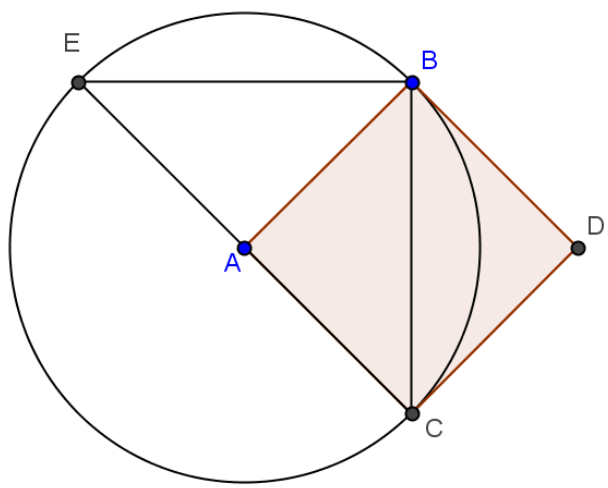
18. En la figura $\square ABDC$ es un cuadrado y $\overline{EC}$ es un diámetro de la circunferencia. Si $BD = 8$ cm entonces la distancia de $\overline{EB}$ al centro del círculo es

(A) 2 cm

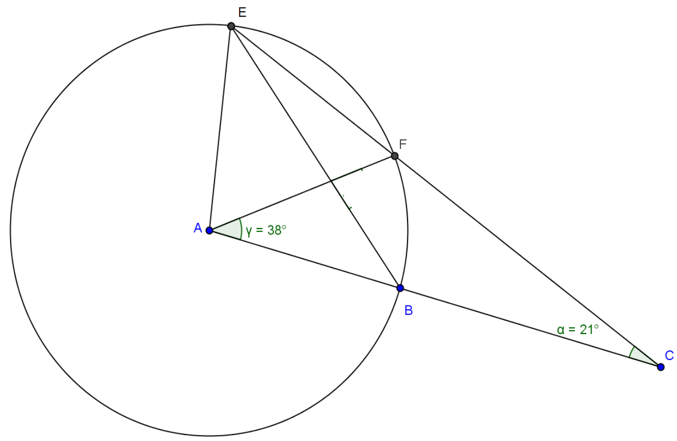
(B) 4 cm

(C) $2\sqrt{2}$ cm

(D) $4\sqrt{2}$ cm



19. Según los datos de la figura, en la cual A es el centro de la circunferencia que contiene a los puntos B, F y E, A – B – C y E – F – C, la medida del arco menor de extremos E y F es.



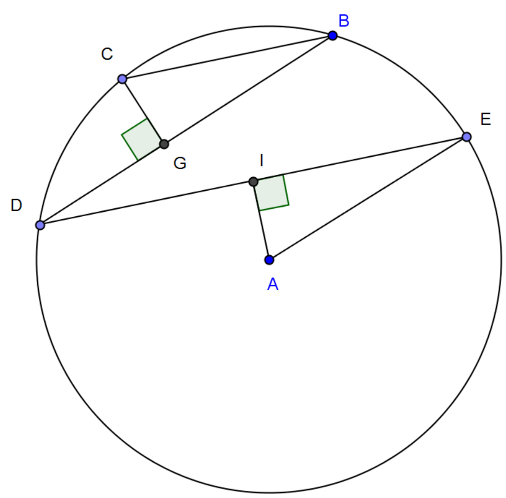
(A) 31°

(B) 52°

(C) 59°

(D) 62°

20. En la figura $\overline{DB}$ y $\overline{DE}$ son cuerdas de la circunferencia de centro A, D – I – E y G es el punto medio de $\overline{BD}$. Si $m\angle E = 25^\circ$ y $m\widehat{BE} = 50^\circ$ entonces $m\angle B =$



(A) 10°

(B) 20°

(C) 25°

(D) 40°

21. Si un sector circular de $24\pi \text{cm}^2$ de área determina un arco de $4\pi \text{cm}$ entonces el radio de la circunferencia mide

(A) 3 cm
(B) 6 cm
(C) 12 cm
(D) 24 cm

22. Dos circunferencias concéntricas distan entre sí 5 cm. Si la mayor de ellas tiene una longitud de $40\pi \text{cm}$ entonces el área de la región limitada por ellas es

(A) 625π cm^2
(B) 400π cm^2
(C) 225π cm^2
(D) 175π cm^2

23. En un polígono regular en el que se pueden trazar en total 20 diagonales, cada ángulo interno mide

(A) 45°
(B) 90°
(C) 120°
(D) 135°

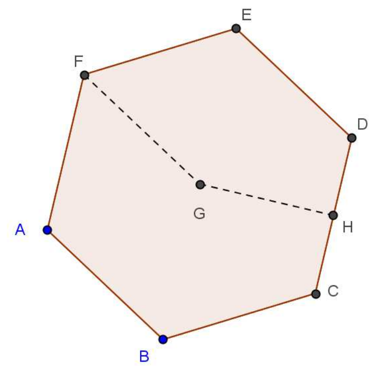
24. Un patio tiene forma de hexágono regular de 4 m de lado. Si G es el centro del hexágono y H es el punto medio de uno de los lados, como en la figura, ¿Cuánta distancia recorre una hormiga que camina de F a H por el camino punteado?

(A) 6 m

(B) $6\sqrt{3}$ m

(C) $2+4\sqrt{3}$ m

(D) $4+2\sqrt{3}$ m



25. En un cuadrado las diagonales miden 12 cm entonces la apotema mide

(A) 3 cm

(B) 6 cm

(C) $3\sqrt{2}$ cm

(D) $3\sqrt{3}$ cm

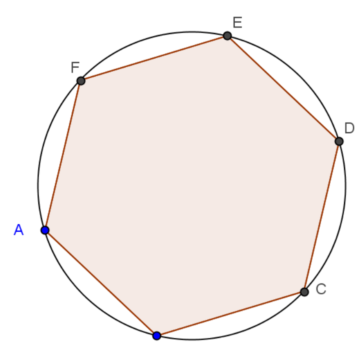
26. En la figura, el área del círculo es 6π cm^2, entonces el área del hexágono regular inscrito en ella es

(A) $9\sqrt{3}$ cm^2

(B) $12\sqrt{3}$ cm^2

(C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm^2

(D) $\frac{27}{2}\sqrt{3}$ cm^2



27. La longitud de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero es 12π cm. El perímetro de dicho triángulo es

(A) $12\sqrt{3}$ cm

(B) $18\sqrt{3}$ cm

(C) $24\sqrt{3}$ cm

(D) $36\sqrt{3}$ cm

28. En una pirámide recta de base cuadrada, las aristas de la base miden 6cm y las aristas laterales miden 10 cm. La altura de la pirámide mide

(A) 8 cm

(B) 82 cm

(C) $\sqrt{82}$ cm

(D) $\sqrt{118}$ cm

29. En un prisma recto de 10 cm de altura la base es un triángulo equilátero. Si el volumen es 1440 cm^3 entonces las aristas de la base miden

(A) $8\sqrt{3}$ cm

(B) $8\sqrt[4]{3}$ cm

(C) $8\sqrt[4]{9}$ cm

(D) $8\sqrt[4]{27}$ cm

30. En un cubo de 216 cm^3 de volumen se puede inscribir una esfera cuyo diámetro mide

(A) 3 cm

(B) 6 cm

(C) 12 cm

(D) $6\sqrt{3}$ cm

Fin de la primera parte

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

TERCER EXAMEN PARCIAL 2013 - Sábado 5 de octubre

Nombre completo: ________________________________ CÓDIGO: __________

COLEGIO: ____

Pregunta	1	2	3	4
Puntos obtenidos				

SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor 20 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (4 puntos) Considere la función $f:\mathbb{R}\to A$ definida por $f(x)=\dfrac{5^{2-x}}{4}-\dfrac{3}{5}$. Si se sabe que *f* es biyectiva, determine el conjunto A y la función f^{-1}.

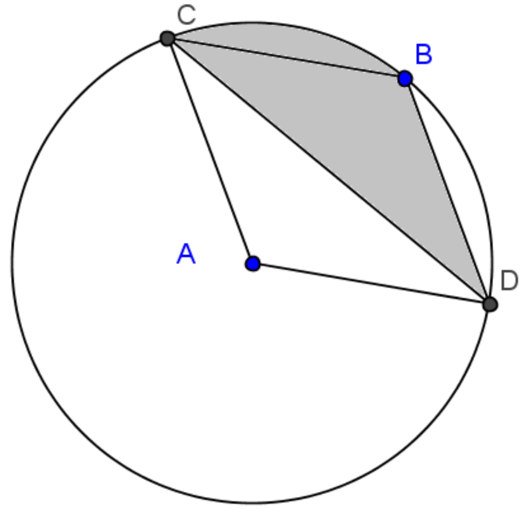
2. (6 puntos) El número de bacterias en un cultivo después de t horas está dado por la fórmula $n(t) = 500e^{0,4t}$. Determine:

a. (3 puntos) ¿Cuánto ha aumentado, aproximadamente, la cantidad de bacterias desde el inicio del cultivo hasta que hayan pasado 2 ,5 horas?

b. (3 puntos) ¿Después de cuántas horas el número de bacterias será de 10 000?

Use las siguientes aproximaciones: $\ln 2 \approx 0,69$ y $\ln 5 \approx 1,61$

3.(6 puntos) En la figura A es el centro de la circunferencia que contiene a los puntos C, D y B, tales que □ADBC es un rombo de 24 cm de perímetro. Determine el área de la región sombreada.



4. (4 puntos) Calcule el área total de un prisma recto cuya base es un hexágono regular si se sabe que todas las aristas son congruentes y el volumen es $1500\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

SOLUCIÓN

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 30 puntos)**

1	B	11	A	21	C
2	A	12	D	22	D
3	A	13	C	23	D
4	B	14	D	24	D
5	A	15	C	25	C
6	C	16	A	26	A
7	B	17	A	27	D
8	C	18	D	28	C
9	C	19	D	29	D
10	D	20	B	30	B

SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor 20 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (4 puntos) Considere la función $f:\mathbb{R}\to A$ definida por $f(x)=\frac{5^{2-x}}{4}-\frac{3}{5}$. Si se sabe que *f* es biyectiva, determine el conjunto *A* y la función f^{-1}.

Solución

La gráfica de $f(x)=\frac{5^{2-x}}{4}-\frac{3}{5}$ es asintótica a la recta de ecuación $x=-\frac{3}{5}$ y es decreciente.

Su ámbito es $A=\left]-\frac{3}{5},+\infty\right[$.

Para determinar el criterio de la inversa de *f* basta con despejar *y* en $x=\frac{5^{2-y}}{4}-\frac{3}{5}$

$x+\frac{3}{5}=\frac{5^{2-y}}{4} \leftrightarrow 4\left(x+\frac{3}{5}\right)=5^{2-y} \leftrightarrow \log_5 4\left(x+\frac{3}{5}\right)=2-y \leftrightarrow y=2-\log_5 4\left(x+\frac{3}{5}\right)$ por lo que

se tiene:

$f^{-1}(x)=2-\log_5 4\left(x+\frac{3}{5}\right)$

$f^{-1}: \left]-\frac{3}{5},+\infty\right[\to \mathbb{R}$.

2. El número de bacterias en un cultivo después de t horas está dado por la fórmula

$n(t)=500e^{0,4t}$. Determine:

Solución

a. (3 puntos) ¿Cuánto ha aumentado, aproximadamente, la cantidad de bacterias desde el inicio del cultivo hasta que hayan pasado 2 ,5 horas?

b. (3 puntos) ¿Después de cuántas horas el número de bacterias será de 10 000?

Use las siguientes aproximaciones: $\ln 2 \approx 0,7$ y $\ln 5 \approx 1,6$

a. $n(0)=500e^{0,4\cdot 0}=500e^{0}=500$ y $n(2,5)=500e^{0,4\cdot 2,5}=500e^{1}\approx 500\cdot 2,71=1355$

Por lo tanto, aumentó aproximadamente en 855 bacterias.

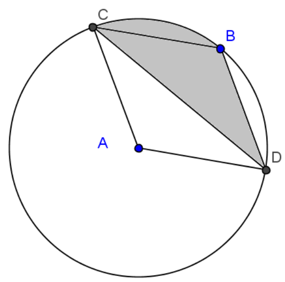
b.

$$10000 = 500e^{0,4t}$$
$$20 = e^{0,4t}$$
$$0,4t = \ln 20$$
$$t = \frac{\ln 20}{0,4}$$

$$t = \frac{2\ln 2 + \ln 5}{0,4}$$
$$t \approx \frac{2\ln 2 + \ln 5}{0,4} = \frac{2 \cdot 0,7 + 1,6}{0,4} = \frac{3}{0,4} = 7,5$$

Deben pasar aproximadamente 7,5 horas.

3. (5 puntos) En la figura A es el centro de la circunferencia que contiene a los puntos C, D y E, tales que □ADBC es un rombo de 24 cm de perímetro. Determine el área de la región sombreada.



Solución

Como el cuadrilátero es un rombo entonces AC= BC = AB = r, donde r es el radio del círculo.

Si el perímetro del rombo es 24 entonces cada uno de los lados mide 6cm y por lo tanto el radio mide 6 cm.

Como ΔABD es equilátero, el área de la región sombreada corresponde a la suma del área de un segmento circular cuyo ángulo central mide 60° y la mitad del área del rombo. Esta última es igual al área del ΔABD, por lo que el área de la región sombreada es igual al área del sector circular determinado por A, B y C, cuyo ángulo central mide 60°.

Como AC = 6 cm entonces el área sombreada es $A = \frac{\pi \cdot 36}{6} = 6\pi$

4. (5 puntos) Calcule el área total de un prisma recto cuya base es un hexágono regular si se sabe que todas las aristas son congruentes y el volumen es $1500\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Solución

Sea x la medida de cada arista. El área de la base sería $\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$ y el volumen estaría dado

$$\frac{3x^3\sqrt{3}}{2}=1500\sqrt{3}$$

por
$$\frac{3x^3}{2}=1500$$
$$3x^3=3000$$
$$x=10$$

Por lo tanto, el área total es $6\cdot 10\cdot 10+2\cdot\frac{3\cdot 10^2\sqrt{3}}{2}=600+300\sqrt{3}$