Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

I EXAMEN PARCIAL 2015

PRECÁLCULO

-Décimo Año-

Nombre: ________________________________ código: _______

Colegio: ____

Fórmula 1

Sábado 18 de abril de 2015

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (27 puntos) y la segunda es de desarrollo (23 puntos).

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En la parte de desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 27 puntos)**

1. Al simplificar la expresión, $\frac{8-2x-x^2}{x^2-16}$, para $x \neq \pm 4$ se obtiene

(A) $\frac{x-2}{x-4}$

(B) $\frac{x+2}{x+4}$

(C) $\frac{2-x}{x-4}$

(D) $\frac{2-x}{x+4}$

2. Una expresión equivalente a $\frac{9-n^2-25-10n}{n^3+8}$, para $n \neq -2$, es igual a

(A) $\frac{n-8}{n^2+2n+4}$

(B) $\frac{8-n}{n^2+2n+4}$

(C) $\frac{n+8}{n^2-2n+4}$

(D) $\frac{-(n+8)}{n^2-2n+4}$

3. El resultado de $x+1-\frac{1}{x+1}$, para $x \neq -1$ corresponde a

(A) $\frac{x(x+2)}{x+1}$

(B) $x+1$

(C) $x(x+1)$

(D) $x(x-1)$

4. El resultado de $\frac{2a+6b}{3a^2b} \div \frac{-4a-12b}{6a^2b^2}$ $a \neq 0, b \neq 0, a \neq -3b,$ corresponde a

(A) b

(B) $-b$

(C) $\frac{4(a+3b)}{a-3b}$

(D) $\frac{-4(a+3b)}{a-3b}$

5. Al simplificar la expresión $\frac{y^{-2}-x^{-2}}{y^{-2}+x^{-2}}$, para x$\neq 0, y \neq 0$, se obtiene

(A) -2

(B) $\frac{x-y}{x+y}$

(C) $\frac{y-x}{x+y}$

(D) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

6. La solución de la ecuación $2x - x\sqrt{5} = 3$ corresponde a

(A) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

(B) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(C) $3 - \sqrt{5}$

(D) $-6 - 3\sqrt{5}$

7. El conjunto solución de $x - |2x+1| = x - 4$ corresponde a

(A) $\{ \}$

(B) $\mathbb{R}$

(C) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

(D) $\left\{\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$

8. De las siguientes ecuaciones:

I. $|-x+7|=5$

II. $-\left|x-2\sqrt{2}\right|=2$

¿Cuáles tienen soluciones reales?

(A) Solamente I

(B) Solamente II

(C) Ninguna

(D) Ambas

9. El conjunto solución de la ecuación

$(2x-1)(3x+2)+(3x+2)(x+1)=0$ corresponde a

(A) $\{\ \ \}$

(B) $\left\{\frac{-2}{3}\right\}$

(C) $\left\{\frac{-2}{3},0\right\}$

(D) $\left\{\frac{-3}{2},0\right\}$

10. Una solución de la ecuación $4x^4-15x^2-4=0$ es

(A) -1

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) -2

(D) 1

11. ¿Cuántas soluciones reales negativas tiene la ecuación $-x^4 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

12. El número de soluciones positivas de la ecuación

$(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) - 2 = 0$ es igual a

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

13. El conjunto solución de la ecuación $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$ corresponde a

(A) $\{\ \ \}$

(B) $\{-3\}$

(C) $\{3\}$

(D) $\{-3, 3\}$

14. El conjunto solución de la ecuación $\frac{-4x-8}{x^2+4} = 0$ corresponde a

(A) $\{\ \ \}$

(B) $\{2\}$

(C) $\{-2\}$

(D) $\{-4\}$

15. La ecuación $\sqrt{x+3} + 3x - 1 = 4x$ tiene

(A) cero soluciones reales

(B) una única solución real

(C) dos soluciones racionales distintas

(D) dos soluciones reales distintas

16. Considere las siguientes igualdades:

I. $\sqrt[4]{x^4 + 16} = x + 2$

II. $\sqrt{(1-3x)^2} = 1 - 3x$

III. $\sqrt[5]{(x^3+1)^5} = x^3 + 1$

¿Cuáles de ellas son identidades?

(A) Solamente I y II

(B) Solamente I y III

(C) Solamente II y III

(D) Solamente III

17. Si k es una constante real, para que la ecuación $2k + 5x - x^2 = 0$ tenga una única solución real debe suceder que

(A) $25 - 8k = 0$

(B) $25 + 8k = 0$

(C) $25 - 4k^2 > 0$

(D) $25 + 4k^2 \geq 0$

18. Una pieza de alambre de 8 m de longitud será cortada en dos partes y cada parte se doblará para formar un cuadrado. ¿Cuántos metros debe medir uno de los pedazos, si la suma de las áreas de los cuadrados debe ser de 2 m^2?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

19. Si la suma de dos números enteros consecutivos es igual a su producto disminuido en 29 y "x" es el menor de los números, entonces, la ecuación que permite resolver la situación planteada es

(A) $x^2 + 3x - 30 = 0$

(B) $x^2 - 3x - 28 = 0$

(C) $x^2 - x - 30 = 0$

(D) $x^2 - x - 28 = 0$

20. Si los puntos de coordenadas A$(-1,3)$ y B $(3,1)$ son los extremos de un diámetro de una circunferencia, entonces una ecuación para esta curva es

(A) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$

(B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

(C) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 20$

(D) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{5}$

21. La ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación

$x^2 + y^2 = 9$ en el punto $(-3,0)$ corresponde a

(A) $x = 0$

(B) $y = 0$

(C) $x = -3$

(D) $y = -3$

22. Las coordenadas del centro de la circunferencia de ecuación

$x^2 + 6x + y^2 = 10$ corresponden a

(A) $(0,3)$

(B) $(3,0)$

(C) $(0,-3)$

(D) $(-3,0)$

23. El radio de la circunferencia cuyo centro es el punto de coordenadas $C\left(\frac{1}{2},-1\right)$ y que contiene el punto $D\left(\frac{3}{2},-1\right)$ corresponde a

(A) 1

(B) 2

(C) $\sqrt{2}$

(D) 4

24. Considere las rectas determinadas por los puntos de coordenadas $E(-4,0), G(3,5)$, $I(3,-2)$ y $K(8,-2)$ Se puede asegurar con certeza que

(A) $\overleftrightarrow{EG} \perp \overleftrightarrow{GK}$

(B) $\overleftrightarrow{EI} \parallel \overleftrightarrow{IK}$

(C) $\overleftrightarrow{EI} \parallel \overleftrightarrow{GK}$

(D) $\overleftrightarrow{EG} \perp \overleftrightarrow{EK}$

25. Un punto que pertenece al interior de la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ corresponde a

(A) $(1,3)$

(B) $(0,1)$

(C) $(2,2)$

(D) $(2,-1)$

26. Considere la parábola que contiene al punto $(4,3)$ y cuyo eje de simetría es la recta de ecuación $x = 2$, con certeza se puede afirmar que

(A) interseca al eje X

(B) es cóncava hacia abajo

(C) es cóncava hacia arriba

(D) interseca al eje Y en el punto $(0,3)$

27. La ecuación de la parábola de vértice $(5,0)$ y que interseca al eje Y en el punto $(0,25)$ corresponde a

(A) $y = x^2 + 25$

(B) $y = (x-5)^2$

(C) $y = (x+5)^2 - 5$

(D) $y = (x+5)^2 + 25$

Fin de la primera parte

Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

I EXAMEN PARCIAL 2015

PRECÁLCULO

-Décimo Año-

NOMBRE COMPLETO: ____

COLEGIO: ____

CÓDIGO: _________________________

SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor 23 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los ejercicios que se le plantean a continuación. Deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

PREGUNTA	Valor	Puntos obtenidos
1	3 puntos	
2	7 puntos	
3	7 puntos	
4	6 puntos	
TOTAL	23 puntos	

1. (3 puntos) Racionalice el numerador de la siguiente fracción y simplifique al máximo el resultado.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}}=$$

2. (7 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{2-x}}\right)\left(\frac{x}{3-x}-x\right)=0$$

3. (7 puntos) Considere la curva de ecuación $y = x^2 - 2x - 17$. Escriba la ecuación de la forma $y = a(x-h)^2 + k$ e indique la concavidad, intersecciones con los ejes, eje de simetría y vértice de la parábola.

4. (6 puntos) Determine la posición relativa (concéntricas, secantes, interiores, exteriores, tangentes interiores o tangentes exteriores) de las circunferencias determinadas por las siguientes ecuaciones: $x^2 + 6x + y^2 = -8$ y $x^2 + y^2 = 4$

Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

I EXAMEN PARCIAL 2015

PRECÁLCULO

-Décimo Año-

SOLUCIÓN PRIMERA PARTE. SELECCIÓN (Valor 27 puntos)

1	C	**4**	B	**7**	D	**10**	C	**13**	B	**16**	D	**19**	C	**22**	D	**25**	C
2	D	**5**	D	**8**	A	**11**	B	**14**	C	**17**	B	**20**	B	**23**	A	**26**	D
3	A	**6**	D	**9**	C	**12**	C	**15**	B	**18**	D	**21**	C	**24**	A	**27**	B

SOLUCIÓN· SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 23 puntos)

1. (3 puntos) Racionalice el numerador de la siguiente fracción y simplifique al máximo el resultado.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}=$$

$$=\frac{(a-(a+h))}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})}=$$

$$\frac{-h}{ha\sqrt{a+h}\ +\ h(a+h)\sqrt{a}}=$$

$$\frac{-1}{a\sqrt{a+h}\ +\ (a+h)\sqrt{a}}$$

2. (7 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$(\sqrt{x+\sqrt{2-x}}\,)(\frac{x}{3-x}-x)=0 \qquad\qquad x \neq 3$

$\sqrt{x+\sqrt{2-x}}=0 \qquad$ y $\qquad \frac{x}{3-x}-x=0$

$x+\sqrt{2-x} \ = \ 0 \qquad \frac{x-x(3-x)}{3-x}=0$

$\sqrt{2-x} \ = \ -x \qquad x-3x+x^2=0$

$2-x=x^2 \qquad x^2-2x=0$

$x^2+x-2=0 \qquad x(x-2)=0$

$(x+2)(x-1)=0 \qquad x=0 \quad x=2$

$x=-2 \quad \vee \quad x=1 \quad x=1$ no es solución de la ecuación,

Probar las soluciones.

$$S= \{-2,0,2\}$$

3. (7 puntos) Considere la curva de ecuación $y = x^2 - 2x - 17$. Escriba la ecuación de la forma $y = a(x-h)^2 + k$ e indique la concavidad, intersecciones con los ejes, eje de simetría y vértice de la parábola.

$$y = x^2 - 2x - 17$$

$$y = x^2 - 2x + 1 - 17 - 1$$

$$y = (x-1)^2 - 18$$

Concavidad: Cóncava hacia arriba pues $a = 1 > 0$.

Vértice: (1, -18).

Intersección con el eje y: (0, - 17).

Intersecciones con el eje x: $\left(1 + 3\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(1 - 3\sqrt{2}, 0\right)$.

$$(x-1)^2 = 18 \Rightarrow x - 1 = 3\sqrt{2} \ \ o \ x - 1 = -3\sqrt{2} \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 1 \ o \ x = -3\sqrt{2} + 1$$

4. (6 puntos) Determine la posición relativa (concéntricas, secantes, interiores, exteriores, tangentes interiores o tangentes exteriores) de las circunferencias determinadas por las siguientes ecuaciones: $x^2 + 6x + y^2 = -8$ y $x^2 + y^2 = 4$

Ecuación	$x^2 + 6x + y^2 = -8$ $x^2 + 6x + 9 + y^2 = -8 + 9$ $(x+3)^2 + y^2 = 1$	$x^2 + y^2 = 4$
Centro	$C(-3,0)$	$D(0,0)$
Radio	1	2
Distancia entre los centros	$d(C,D) = \sqrt{0 + (-3)^3} = 3$	

La suma de los radios es igual a la distancia de centro a centro. Por lo tanto son tangentes exteriores.

También se puede resolver mediante un sistema de ecuaciones:

$$x^2 + 6x + y^2 = -8 \leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = -8 + 9 \leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+3)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 - x^2 \\ y^2 = 1 - (x+3)^2 \end{cases}$$

$$4 - x^2 = 1 - (x+3)^2$$

$$4 - x^2 = 1 - x^2 - 6x - 9$$

$$12 = -6x$$

$$-2 = x$$

$$y^2 = 4 - (-2)^2 = 0$$

Como la solución del sistema de ecuaciones es única entonces las circunferencias son tangentes. El punto de tangencia es $(-2,0)$, los centros son $(-3,0)$ y $(0,0)$, por lo tanto las circunferencias son tangentes exteriores (el punto de tangencia está entre los centros).