SOLUCIÓN PRIMER EXAMEN PARCIAL

I Parte. Selección única. Marque una equis (X) sobre la letra que antecede a la única respuesta correcta. Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva elección en su cuaderno de examen. (5 puntos, un punto cada respuesta correcta)

1. Dado $r \in I\!R - \{0\}$ y $\lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right] = r$, entonces $\lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{f(3x)}{x}\right]$ es igual a

(A) 0

(B) $\dfrac{r}{3}$

(C) r

(D) $3r$

2. Sean f y h dos funciones tales que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$. Considere las siguientes proposiciones:

I. $\lim\limits_{x \to 0^+}\left[f(x) \cdot h(x)\right]$ no existe

II. $f(0)$ no existe

Con base en la información, **con certeza** ¿cuál o cuáles de ellas se cumplen?

(A) Ambas

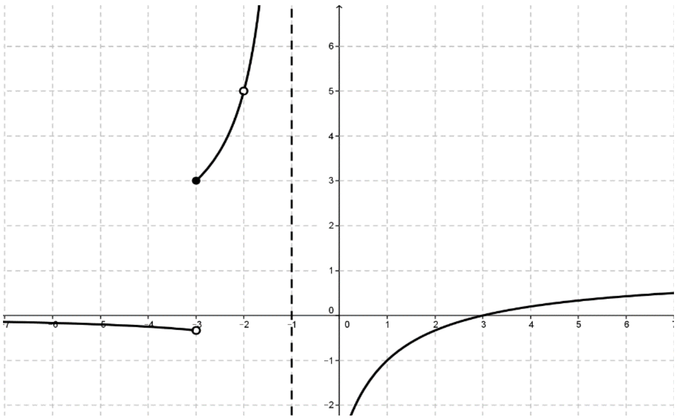
(B) Ninguna

(C) Solamente I

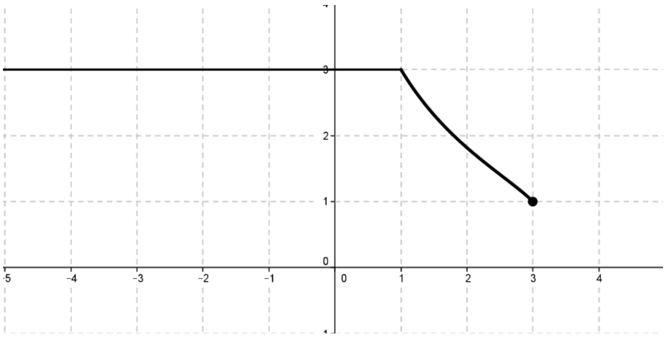
(D) Solamente II

Las siguientes figuras corresponden a las gráficas de f y g, respectivamente. Con base en la información conteste los ítems 3 y 4.

$y = f(x)$



$y = g(x)$



3. ¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x\to 3^-}\left[\dfrac{2f(x)-5g(x)}{x}\right]$?

(A) $\dfrac{1}{3}$

(B) $\dfrac{-5}{3}$

(C) $\dfrac{-11}{3}$

(D) -3

4. En la expresión $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{3x^2-6}{x^3-xg(x)}\right] =$ ______, el símbolo o número que la completa correctamente, corresponde a

(A) $-\infty$

(B) -3

(C) 0

(D) 3

5. El valor de c para que el $\lim_{x\to -2}\left[\dfrac{3x^2+cx+c+3}{x^2+x-2}\right]$ exista, corresponde a

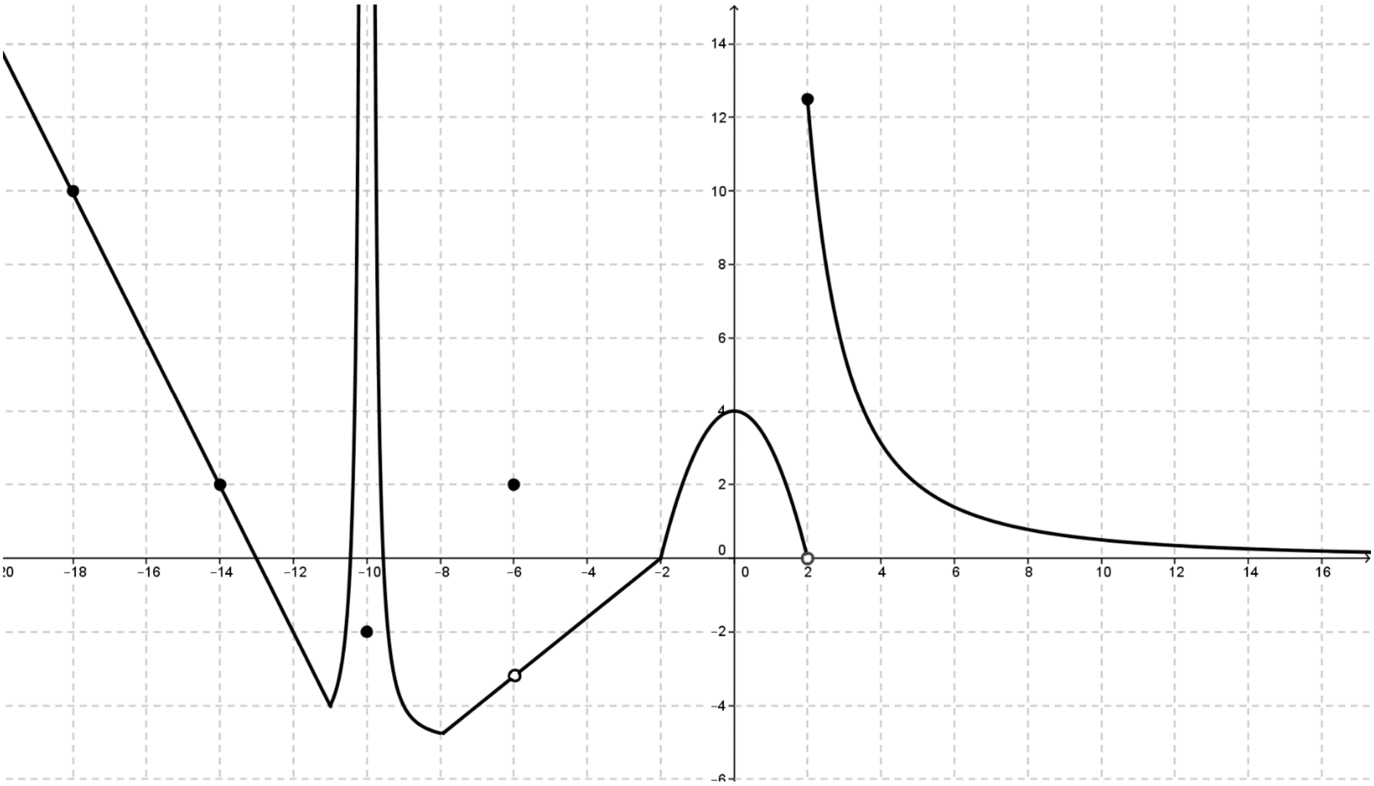
(A) -15

(B) -4

(C) 0

(D) 15

II Parte. Respuesta Breve. La siguiente figura corresponde a la gráfica de f tal que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Conteste en su cuaderno de examen lo que se le solicita. (8 puntos, un punto cada respuesta correcta)



(a)

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to -10} f(x)=+\infty$

$$f'(-16)=\frac{2-10}{-14--18}=-2$$

(b) ¿Existe $\lim\limits_{x\to -6} f(x)$? Justifique. Si existe el límite, pues si determinamos los límites laterales, con base en la representación gráfica se observa que tienden al mismo número real, aunque la imagen no coincida con el límite.

(c) ¿Cuál es un valor del dominio donde existe una discontinuidad inevitable? En $x=-10$ **o en** $x=2$

III Parte. Desarrollo. Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule los siguientes límites, si existen

(a) *(5 puntos)*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{3-\sqrt{10-x}} \text{ forma indeterminada } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{3-\sqrt{10-x}}\bullet\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\bullet\frac{3+\sqrt{10-x}}{3+\sqrt{10-x}}\right]=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(2)^2}{(3)^2-\left(\sqrt{10-x}\right)^2}\bullet\frac{3+\sqrt{10-x}}{\sqrt{x^2+3}+2}\right]=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2+3-4}{9-10+x}\bullet\frac{3+\sqrt{10-x}}{\sqrt{x^2+3}+2}\right]=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{x-1}\bullet\frac{3+\sqrt{10-x}}{\sqrt{x^2+3}+2}\right]=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\bullet\frac{3+\sqrt{10-x}}{\sqrt{x^2+3}+2}\right]=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+1)\left(3+\sqrt{10-x}\right)}{\sqrt{x^2+3}+2}\right]=\frac{(1+1)\left(3+\sqrt{10-1}\right)}{\sqrt{(1)^2+3}+2}=\frac{2\cdot 6}{4}=3$$

(b) *(4 puntos)*

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{-6x^3+13x^2-9x+2}{9x^2-4} \quad \text{forma indeterminada } \frac{0}{0}$$

Sea $P(x)=-6x^3+13x^2-9x+2$, como $P\left(\frac{2}{3}\right)=0$, entonces por el teorema del factor:

$$-6x^3+13x^2-9x+2=\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(-6x^2+9x-3\right)=\frac{1}{3}\cdot(3x-2)\left(-6x^2+9x-3\right)$$

Luego $\lim_{x\to\frac{2}{3}} \dfrac{\frac{1}{3}\cdot(3x-2)\left(-6x^2+9x-3\right)}{(3x-2)(3x+2)}=$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-6x^2+9x-3\right)}{(3x+2)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-6\left(\frac{2}{3}\right)^2+9\left(\frac{2}{3}\right)-3\right)}{\left(3\left(\frac{2}{3}\right)+2\right)}=\frac{\frac{1}{9}}{4}=\frac{1}{36}$$

(c) *(6 puntos)*

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2 + x\ \text{sen}(x)}{\cos(x)-1}\right] \text{ forma indeterminada } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2 + x\ \text{sen}(x)}{\cos(x)-1}\bullet\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[x^2 + x\ \text{sen}(x)\right]\left[\cos(x)+1\right]}{\cos^2(x)-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\left[x^2 + x\ \text{sen}(x)\right]\left[\cos(x)+1\right]}{-\left[1-\cos^2(x)\right]}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\left[x^2 + x\ \text{sen}(x)\right]\left[\cos(x)+1\right]}{-\left[\text{sen}^2(x)\right]}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2\left[1+\frac{\text{sen}(x)}{x}\right]\left[\cos(x)+1\right]}{-\left[\text{sen}^2(x)\right]}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{\left[\text{sen}^2(x)\right]}\cdot\left[1+\frac{\text{sen}(x)}{x}\right]\cdot\frac{\left[\cos(x)+1\right]}{-1}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\left[\frac{x}{\text{sen}(x)}\right]^2\cdot\left[1+\frac{\text{sen}(x)}{x}\right]\cdot\frac{\left[\cos(x)+1\right]}{-1}\right\}=(1)^2\cdot(1+1)\cdot\frac{1+1}{-1}=-4$$

2. Considere la función f definida en su máximo dominio, tal que $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{ax^2-2ax+1} & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 2 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$.

(8 puntos)

(a) Determine el valor o los valores de a para que f sea continua en $x=0$.

Se deben cumplir las siguientes condiciones:

i) $f(0)$ esté definida, veamos $f(0)=\dfrac{1}{a\cdot 0^2-2\cdot a\cdot 0+1}=1$

ii) Que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exista, esto es $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=k\in I\!R$, ahora bien

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{ax^2-2ax+1}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$. Como los límites laterales son iguales, entonces se concluye que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

iii) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, esto se corrobora de i) y de ii).

Nótese que i), ii) y iii) se corroboran, independientemente del valor de a, por lo tanto en $x=0$, f es continua para cualquier $a\in I\!R$.

(b) Determine el valor o los valores de a para que f sea continua en $x=1$.

Se deben cumplir las siguientes condiciones:

i) $f(1)$ esté definida, veamos $f(1)=2$

ii) Que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ exista, esto es $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=k\in I\!R$, ahora bien

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{ax^2-2ax+1}=\dfrac{1}{1-a}$. Para que el límite exista se debe cumplir que

$$2=\frac{1}{1-a}\Rightarrow 2-2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

iii) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$, esto se corrobora de i) y de ii).

Por lo tanto, cuando del valor de $a=\dfrac{1}{2}$, f es continua en $x=1$

3. Considere la función h definida en su máximo dominio, tal que $h(x)=\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$. *(6 puntos)*

(a) Analice la continuidad de h.

Como h es una función algebraica racional, entonces es continua en todo su dominio, es decir en

$D_h = I\!R - \{0,1\}$.

Note que $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}$, por otro lado, considerando ese dominio se cumple que $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{(x+1)}{(x-1)}$.

(b) Determine si f posee asíntotas verticales o horizontales. De ser así, escriba la ecuación de cada una de ellas.

Note que: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{(x-1)}=-1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{(x-1)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{(x-1)}=-\infty$, por lo tanto h posee una asíntota vertical cuya ecuación es $x=1$

Note que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=1$ **,** análogamente cuando $x\to-\infty$

Por lo tanto se concluye que la ecuación de la asíntota horizontal es $y=1$.

4. En cada caso calcule la primera derivada de $f(x)$, no debe simplificar.

(a) $f(x)=\dfrac{\sec\left(\sqrt{x^2+2}\right)}{34-\dfrac{2}{x^2}}$ *(5 puntos)*

$$f'(x)=\frac{\left[\sec\left(\sqrt{x^2+2}\right)\right]'\left(34-\dfrac{2}{x^2}\right)-\left[\sec\left(\sqrt{x^2+2}\right)\right]\left(34-\dfrac{2}{x^2}\right)'}{\left(34-\dfrac{2}{x^2}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left[\sec\left(\sqrt{x^2+2}\right)\tan\left(\sqrt{x^2+2}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot 2x\right]\left(34-\dfrac{2}{x^2}\right)-\left[\sec\left(\sqrt{x^2+2}\right)\right]\left(\dfrac{4}{x^3}\right)}{\left(34-\dfrac{2}{x^2}\right)^2}$$

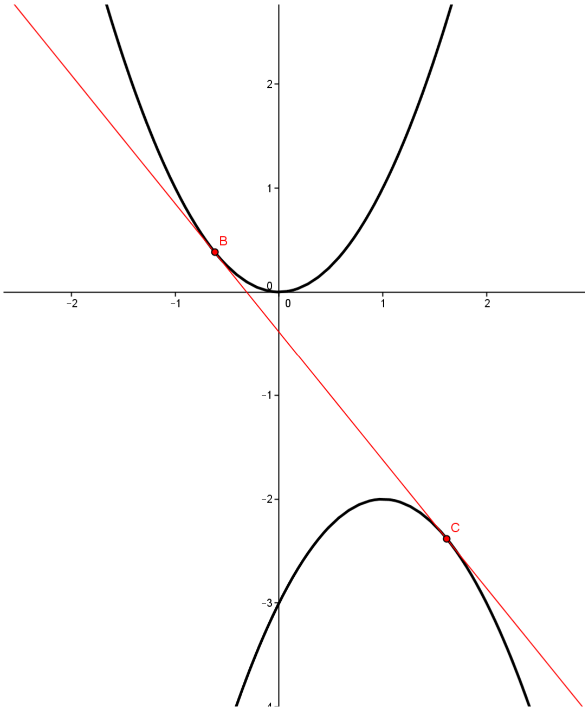
(b) $f(x)=e^{(5x^6-x+3)}\tan(x-3)$ *(4 puntos)*

$$f'(x)=\left[e^{(5x^6-x+3)}\right]'\tan(x-3)+\left[e^{(5x^6-x+3)}\right]\left[\tan(x-3)\right]'$$

$$f'(x)=\left[e^{(5x^6-x+3)}\cdot\left(30x^5-1\right)\right]\tan(x-3)+\left[e^{(5x^6-x+3)}\right]\left[\sec^2(x-3)\right]$$

5. En la siguiente figura se muestra una recta L que es tangente a las gráficas de las funciones f y h. Determine las coordenadas de las abscisas de los puntos de tangencia. Considere que $f(x)=x^2$ y $h(x)=-x^2+2x-3$.

(8 puntos)



El punto B tiene coordenadas (b,b^2) y el punto C tiene coordenadas $(c,-c^2+2c-3)$.

Consecuentemente, la pendiente de la recta L está dada por $m=\dfrac{-c^2+2c-3-b^2}{c-b}$

Por otro lado, como L es tangente a f en B, entonces $f'(b)=m \Rightarrow 2b=m$

Análogamente, como L es tangente a h en C, entonces $h'(\text{c})=m \Rightarrow -2c+2=m$

Luego :

$$2b=-2c+2 \Rightarrow b=1-c$$

$$-2c+2=\frac{-c^2+2c-3-b^2}{c-b} \underset{c\neq b}{\Rightarrow}$$

$$-2c+2=\frac{-c^2+2c-3-(1-2\text{c}+\text{c}^2)}{c-(1-\text{c})} \Rightarrow$$

$$(-2c+2)(2c-1)=-2c^2+4c-4 \Rightarrow$$

$$-2c^2+2c+2=0 \Rightarrow$$

$c=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ no se toma en cuenta pues $c>0$, entonces $c=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, luego $b=1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Las coordenadas en x de los puntos B y C son: $1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, respectivamente.