Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

PRIMER EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO I

Valor: 56 puntos. Tiempo máximo: 3 horas.
Sábado 18 de abril de 2015

INSTRUCCIONES GENERALES

- Antes de contestar lea cuidadosamente las instrucciones y los enunciados de las preguntas.
- Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (5 puntos) y la segunda es de desarrollo (51 puntos).Utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble azul o negra para resolver este examen. No se aceptan apelaciones sobre aquellos ejercicios que deje resueltos con lápiz o presenten algún tipo de alteración.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- **ESTE EXAMEN DEBERÁ SER RESUELTO EN EL CUADERNO DE EXAMEN. ESCRIBA LAS RESPUESTAS DE LA PARTE DE SELECCIÓN. EN LA PARTE DE DESARROLLO DEBE APARECER TODO EL PROCEDIMIENTO QUE JUSTIFIQUE CORRECTAMENTE LA SOLUCIÓN Y LA RESPUESTA DE CADA ÍTEM.**
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.

I PARTE. SELECCIÓN ÚNICA. Valor: 5 puntos (un punto cada respuesta correcta).
Instrucciones: A continuación se le presentan 5 enunciados con cuatro opciones de respuesta de las cuales solamente una es correcta. Marque una equis sobre la letra que antecede a la opción que completa correctamente cada enunciado. **Recuerde trasladar su respuesta al cuaderno de examen escribiendo el número de enunciado y la opción seleccionada.**

1. Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{100}-1}{x-1}\right)=100$, entonces considere las siguientes afirmaciones:

I. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{100}-1}{x^2-1}\right)=50$.

II. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{100}-1}{x^3-1}\right)=\frac{100}{3}$.

III. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{100}-1}{1-x^4}\right)=25$.

De ellas, **con certeza**, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

(A) Solamente I y III
(B) Solamente I y II
(C) Solamente II
(D) Solamente I

2. Analice las siguientes afirmaciones, referidas a dos funciones f y h tales que $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to 0} h(x)=0$:

I. $x=0$ es la ecuación de una asíntota asíntota vertical de la gráfica de *f*.

II. $\lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot h(x)\right]$ no existe.

III. $f(0)$ no existe.

De ellas, **con certeza**, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

(A) Solamente II y III
(B) Solamente I y II
(C) Solamente III
(D) Solamente I

3. El valor de c para el cual el $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{-c-x}+c}{x^2+5x+6}$ existe, corresponde a

(A) -3
(B) -2
(C) -1
(D) 2

4. Sea f una función definida en su máximo dominio, tal que $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+6}{x^4-16}$. Considere las siguientes afirmaciones:

I. f posee una discontinuidad evitable en $x=-2$.

II. f posee una discontinuidad inevitable en $x=-4$.

III. $y=0$ es la ecuación de la asíntota horizontal de la gráfica de f.

De ellas, **con certeza**, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

(A) Solamente II y III
(B) Solamente I y III
(C) Solamente III
(D) Solamente I

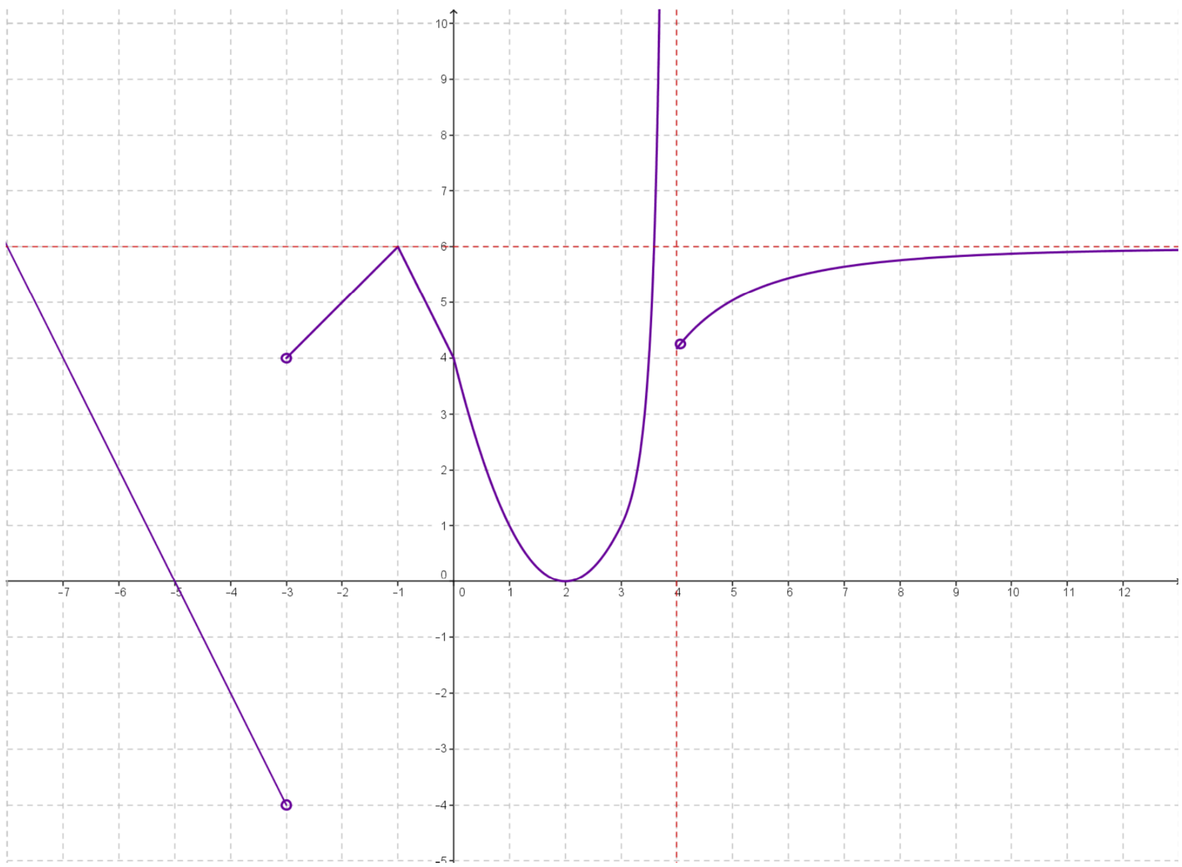
5. Sea f una función tal que $|f(x)-1|\le(x-2)^2$, $\forall x\in\left]-5,5\right[$, entonces $\lim_{x\to 2} f(x)$ corresponde a

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 5

II PARTE: DESARROLLO. Valor: 51 puntos.

1) Construya la gráfica de una función f que satisfaga, simultáneamente, cada una de las siguientes condiciones: (8 puntos)

$D_f = I\!R - \{-3,4\}$	$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -4$
f es continua en todo su dominio	$f'(-1)$ no existe
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6$	$f'(2) = 0$
$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$	$f'(x) = -2, \forall x \in \left]-\infty, -3\right[$



2) Calcule, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+4}-2}{|1-x|}$ (5 puntos)

Note que como $x\to+\infty$, entonces $|1-x| = -(1-x) = x-1$, luego

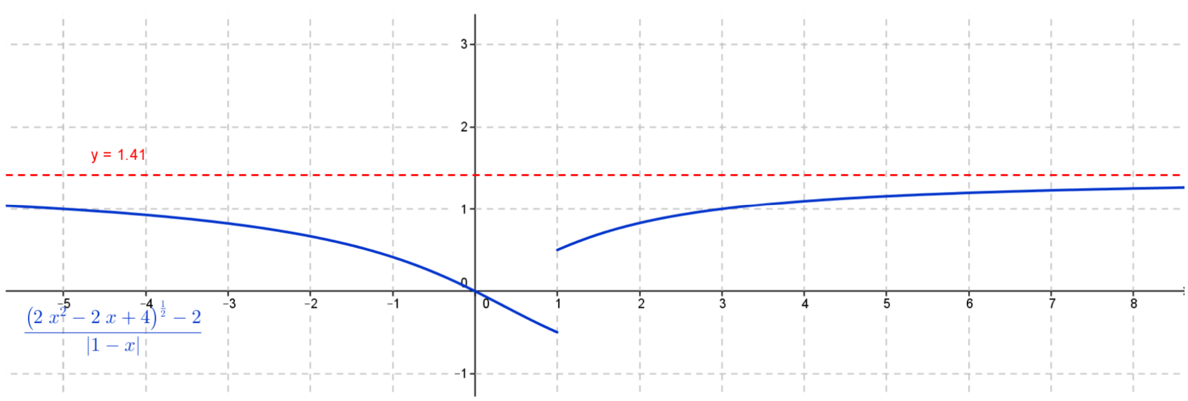
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-2}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(2-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-2}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(2-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-2}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[\sqrt{\left(2-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-\frac{2}{x}\right]}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{\left(2-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-\frac{2}{x}\right]}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{2}$$



b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{2x+1}-1}{2x+1-\sqrt[3]{2x+1}}$ (Sugerencia: Realice un cambio de variable) (5 puntos)

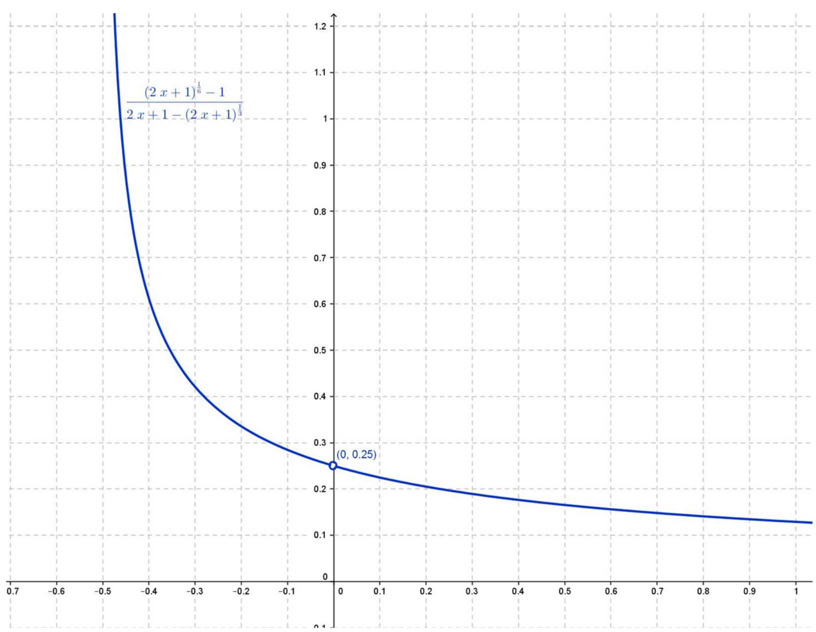
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{2x+1}-1}{2x+1-\sqrt[3]{2x+1}}=\frac{0}{0}\text{ forma indeterminada}$$

Si intentáramos racionalizar, el procedimiento sería bastante largo, por lo tanto un cambio de variable nos permitiría trabajar con expresiones polinomiales, como se muestra a continuación:

Sea $y^6=2x+1$, entonces $y=\sqrt[6]{2x+1}$ y $y^2=\sqrt[3]{2x+1}$ (proponer el cambio de variable de tal manera que las otras expresiones queden en términos de "y"). Además note que cuando $x\to 0\Rightarrow y\to 1$.

Ahora se reescribe el límite en términos de la nueva variable: $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-1}{y^6-y^2}=\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada. Al factorizar el denominador se tiene: $y^6-y^2=y^2(y-1)(y+1)(y^2+1)$

Luego $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{(y-1)}{y^2(y-1)(y+1)(y^2+1)}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{1}{y^2(y+1)(y^2+1)}=\dfrac{1}{1\cdot(1+1)(1+1)}=\dfrac{1}{4}$



c) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\cos(3x)\cdot\cos(2x)-\cos(2x)\cdot\cos(x)}{x^2}\right]$ (5 puntos)

Al evaluar se tiene $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\cos(3x)\cdot\cos(2x)-\cos(2x)\cdot\cos(x)}{x^2}\right]=\dfrac{0}{0}$ forma indeterminada, por lo tanto se sigue que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)[\cos(3x)-\cos(x)]}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)[\cos(x+2x)-\cos(x)]}{x^2} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)[\cos(x)\cos(2x)-\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(2x)-\cos(x)]}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)[\cos(x)[\cos(2x)-1]-\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(2x)]}{x^2}=$$

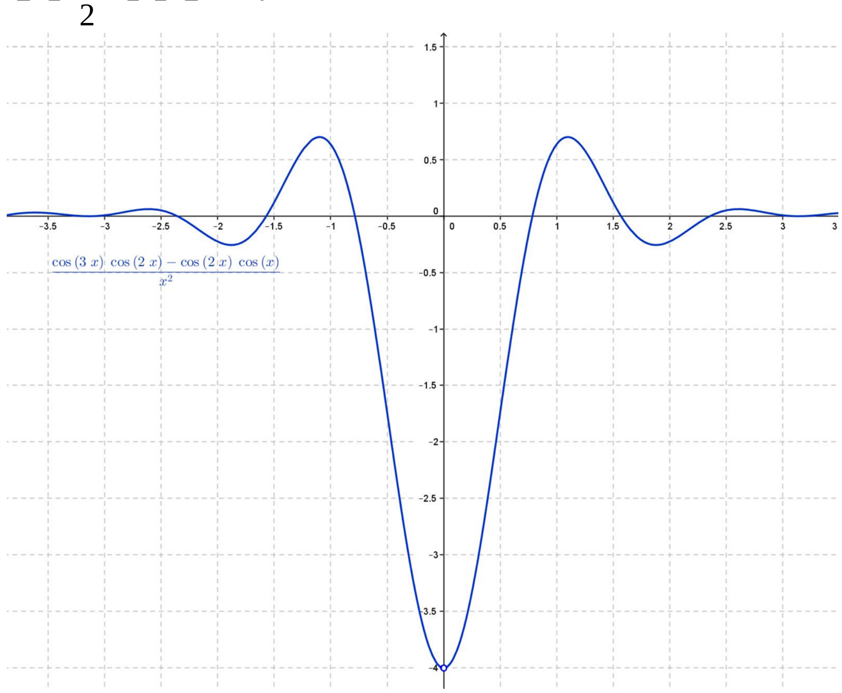
$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(2x)\cos(x)[1-\cos(2x)]}{x^2}-\frac{\cos(2x)\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(2x)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(2x)\cos(x)[1-\cos(2x)]}{x^2}-\frac{\cos(2x)\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(2x)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(2x)\cos(x)[1-\cos(2x)]}{x^2}\cdot\frac{[1+\cos(2x)]}{[1+\cos(2x)]}-\cos(2x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot 2\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}=$$

$$\lim_{x\to 0}-\cos(2x)\cos(x)\cdot 2\cdot\frac{sen(2x)}{2x}\cdot 2\cdot\frac{sen(2x)}{2x}\cdot\frac{1}{[1+\cos(2x)]}-\cos(2x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot 2\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}=$$

$$-1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}-1\cdot 1\cdot 2=-4$$



3) Determine los valores de m y b de tal forma que la función $h:[0,+\infty[\to I\!R$, tal que $h(x)=\begin{cases}5+\sqrt{2x} & \text{si} \quad 0\le x\le 8\\ mx+b & \text{si} \quad x>8\end{cases}$, sea derivable en $x=8$. Utilice la definición de derivada en un punto. (8 puntos)

Para que h sea derivable en $x=8$ debemos verificar que:

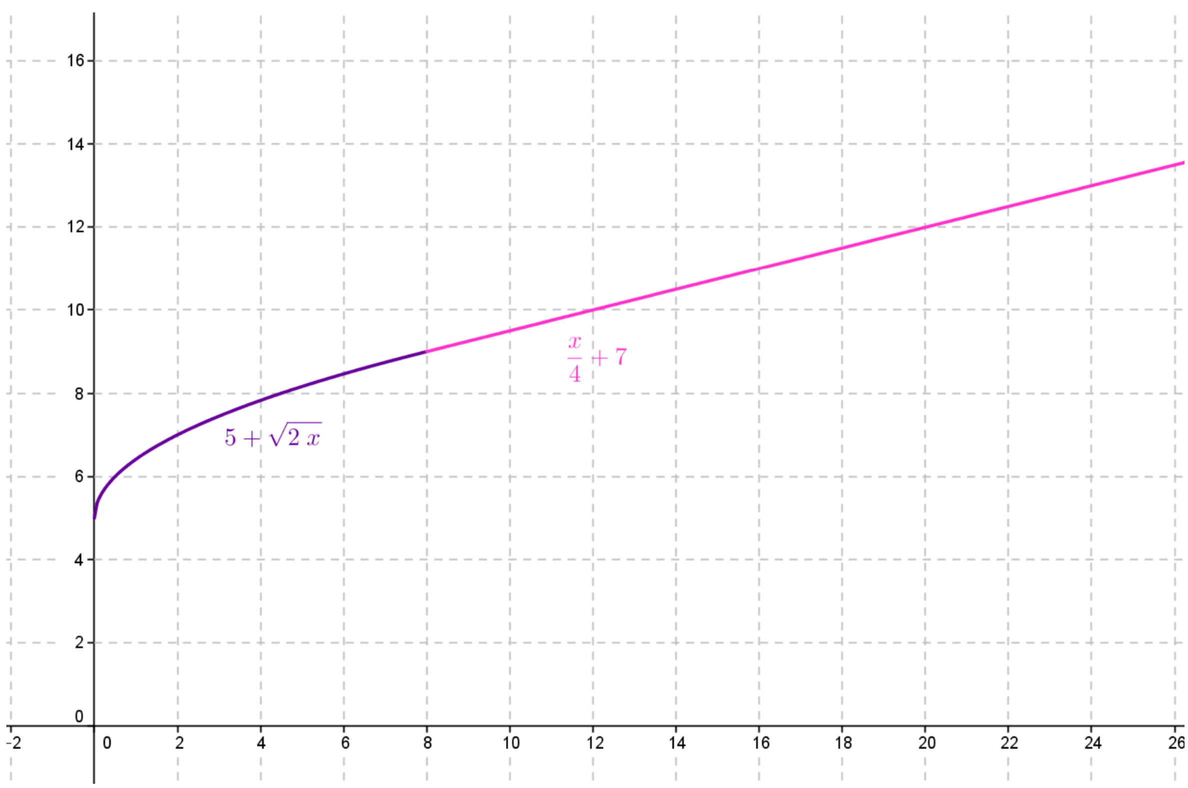
a) h es continua en $x=8$:

- $\lim\limits_{x\to 8^+} mx+b=8m+b$ y $\lim\limits_{x\to 8^-} 5+\sqrt{2x}=9$, para que $\lim\limits_{x\to 8} h(x)$ exista entonces $8m+b=9\Rightarrow b=9-8m$ (**).
- Luego $h(8)=9$.

b) $h'_-(8)=h'_+(8)$:

- $h'_-(8)=\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{h(x)-h(8)}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{5+\sqrt{2x}-9}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{\sqrt{2x}-4}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{2x-16}{(x-8)\left(\sqrt{2x}+4\right)}=\dfrac{1}{4}$
- $h'_+(8)=\lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{h(x)-h(8)}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{mx+b-9}{x-8}\overset{(**)}{=}\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{mx+9-8m-9}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{m(x-8)}{(x-8)}=m$

Por lo tanto $m=\dfrac{1}{4}$, luego $b=9-8\cdot\dfrac{1}{4}=7$.



4) En cada uno de los siguientes casos determine $\frac{dy}{dx}$. No es necesario simplificar:

a) $y = \dfrac{\text{sen}^4\left(e^{2x^3}\right)}{x^2+1}$ (6 puntos)

$$y' = \frac{´4\text{sen}^3(e^{2x^3})\cdot\cos(e^{2x^3})\cdot(e^{2x^3})\cdot 6x^2\cdot\left(x^2+1\right) - \text{sen}^4(e^{2x^3})\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

b) $y = \left[\sec\left(x^2+2x\right)\sqrt[5]{x^3-x}\right]^3$ (7 puntos)

$$y' = 3\left[\sqrt[5]{x^3-x}\,\sec\left(x^2+2x\right)\right]^2\cdot\left[\frac{1}{5\sqrt[5]{\left(x^3-x\right)^4}}\cdot\left(3x^2-1\right)\cdot\sec\left(x^2+2x\right)+\sqrt[5]{x^3-x}\cdot\sec\left(x^2+2x\right)\tan\left(x^2+2x\right)\cdot(2x+2)\right]$$

5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4 - x^2$. Determine las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto de coordenadas $(1,4)$ y que son tangentes a la gráfica de f. (7 puntos)

Note que $(1,4) \notin G_f$.
Consideremos $(a,b) \in G_f$, tal que las rectas que pasan por (a,b) y por $(1,4)$ son tangentes a la gráfica de f.

Como $(a,b) \in G_f$, entonces $f(a) = 4 - a^2 \Rightarrow 4 - a^2 = b$. (1)
Además $f'(a) = -2a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en (a,b). (2)
Por otro lado, como la recta (rectas) pasan por (a,b) y $(1,4)$, entonces su pendiente también está dado por $\frac{4-b}{1-a}$.(3)
De (2) y (3) se tiene que $\frac{4-b}{1-a} = -2a$, luego de (1) sustituimos y se tiene que $\frac{4-4+a^2}{1-a} = -2a \Rightarrow a = 0 \vee a = 2$.

Si $a = 0$, entonces $b = 4$ y $f'(0) = 0$, por lo tanto la ecuación de la recta tangente es $y = 4$.

Si $a = 2$, entonces $b = 0$ y $f'(2) = 0 - 4$, por lo tanto la ecuación de la recta tangente es $y = -4x + 8$.