UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO MATEM – 2011

Miércoles 10 de agosto del 2011
Segundo Examen Parcial Cálculo I
Tiempo Probable: 3 horas

Solucionario

1. Use diferenciales para aproximar el valor de $\cos 147°$. (6 puntos)

Consideremos $y = \cos(x)$. Derivando, se tiene entonces $dy = -\mathrm{sen}(x)dx$.

Dado que 147º en radianes es $\frac{147\pi}{180} rad$ y que se puede aproximar con $150° = \frac{5\pi}{6} rad$, entonces consideramos $x = \frac{5\pi}{6}$ y por ende, $dx = -\frac{\pi}{60}$.

Como $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$ tenemos

$$\cos\left(\frac{147\pi}{180}\right) \approx \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \left[-\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{-\pi}{60}\right)\right]$$

De esta manera, $\cos\left(\frac{147\pi}{180}\right) \approx -\frac{\sqrt{3}}{2} + \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\pi}{60}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{120}$

Por lo tanto, $\cos 147° \approx \frac{\pi - 60\sqrt{3}}{120}$

2. Calcule, utilizando la regla de L'Hôpital, cada uno de los siguientes límites: (14 puntos: 8 y 6 respectivamente)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\left(e^x+1\right) - 2\left(e^x-1\right)}{x^3}$

Simplificando se obtiene $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^x + x - 2e^x + 2}{x^3}$ y al tener la forma $\frac{0}{0}$ se puede aplicar la regla de L'Hôpital directamente:

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + xe^x + 1 - 2e^x}{3x^2}$, donde se vuelve a obtener la forma $\frac{0}{0}$ y se puede aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^x + xe^x - 2e^x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2}$

Simplificando se obtiene $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\left(\frac{2}{x}\right)}$ y al tener la forma ∞^0, se puede considerar la expresión $e^{\frac{2}{x}\ln x}$. Ahora, al ser la función exponencial continua, basta considerar el límite del exponente:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}\ln x$. Como se tiene la forma $0\cdot\infty$ se transforma en una expresión equivalente de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ para aplicar la regla de L'Hôpital:

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} 2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 2\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x^2} = e^0 = 1$$

3. a) Enuncie correctamente el Teorema de Rolle. (3 puntos)

Sea f una función que satisface las siguientes tres condiciones:

- f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$
- f es derivable en el intervalo abierto $]a,b[$
- Se cumple que $f(a)=f(b)$

Entonces, existe un número real $c\in\,]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

b) Utilice el Teorema de Rolle para demostrar que el gráfico de la función *f* definida por $f(x)=x^4-x^3+7x^2+3x-11$ tiene al menos una recta tangente horizontal. (5 puntos)

Como $f(x)=x^4-x^3+7x^2+3x-11$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser función polinomial, se puede garantizar, por Teorema de Valor Intermedio, que tiene un cero en el intervalo $]-2,-1[$ pues $f(-2)=21$ y $f(-1)=-5$. De la misma manera, se puede garantizar que f posee otro cero en el intervalo $]1,2[$ pues $f(1)=-1$ y $f(2)=17$.

Sean $k_1\in\,]-2,-1[$ y $k_2\in\,]1,2[$ tales que $f(k_1)=f(k_2)=0$.

Ahora, utilicemos el Teorema de Rolle para probar que f tiene al menos una recta tangente horizontal, lo cual es equivalente a probar que existe al menos un punto donde su derivada es 0.

Como la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$, se verifican las tres condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[k_1, k_2]$:

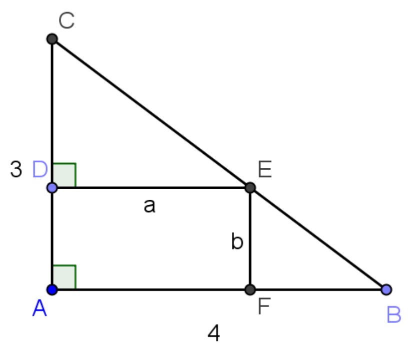
- f es continua en el intervalo cerrado $[k_1, k_2]$
- f es derivable en el intervalo abierto $]k_1, k_2[$
- Se cumple que $f(k_1) = f(k_2)$

Por lo tanto, el Teorema de Rolle garantiza que existe un valor $c \in]k_1, k_2[$ donde $f'(c) = 0$.

4. Defina el criterio de una función continua f en el intervalo $[-1, 2]$, cuya derivada no exista en el punto donde alcanza su mínimo absoluto y cuyo máximo absoluto se alcance en $x = -1$. Justifique la existencia de esos valores extremos (máximo y mínimo absolutos) de la función. (3 puntos)

Considere por ejemplo, la función $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 1|$.
Al ser continua, el Teorema del valor extremo garantiza que se alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.
Observe que en efecto, f alcanza su máximo absoluto en $x = -1$, donde $f(-1) = 2$, y alcanza su mínimo en $x = 1$, donde $f(1) = 0$ y donde efectivamente, la derivada en ese punto no existe.

5. Calcule el área del rectángulo más grande que se puede inscribir en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm, si dos de los lados del rectángulo están en los catetos. (8 puntos)



Consideremos el rectángulo cuyos lados miden a y b, tales que $0 \le a \le 4$ y $0 \le b \le 3$.

Se busca maximizar el área de dicho rectángulo, pero para definir la función en términos de una de las variables, de debe relacionarlas mediante semejanza de triángulos.
En efecto, $\Delta CDE \sim \Delta CAB$. Entonces se cumple la proporcionalidad entre sus lados, es decir

$$\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{3-b}{3} = \frac{a}{4} \Rightarrow 12 - 4b = 3a \Rightarrow a = 4 - \frac{4b}{3}$$

Así, la función área $A:[0,3]\to\mathbb{R}$ que se quiere maximizar está dada por $A(b)=a\cdot b=\left(4-\frac{4b}{3}\right)\cdot b \Rightarrow A(b)=4b-\frac{4b^2}{3}$.

Dado que su máximo se alcanza cuando su derivada es 0, y que $A'(b)=4-\frac{8b}{3}$; tenemos:
$A'(b)=0\Rightarrow 4-\frac{8b}{3}=0\Rightarrow b=\frac{3}{2}$, valor que se encuentra en el dominio de la función.

Por lo tanto, el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un triángulo rectángulo de catetos con medidas 3cm y 4cm, tiene las siguientes medidas:
$b=\frac{3}{2}$ y $a=2$ para un valor del área de 3cm^2.

6. **Considere la función definida por** $F(x)=\int_1^{\operatorname{arcsec} x}\sec t\,dt$ **. Verifique que** $F'\left(\sqrt{2}\right)=1$**.**
(4 puntos)

Observe que la función dada por el criterio $f(x)=\sec x$ es continua en $\left[1,\frac{\pi}{2}\right[$ por lo que la función F está definida, es continua y derivable en el intervalo abierto.

Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que
$F'(x)=\sec(\operatorname{arcsec} x)\cdot\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}=x\cdot\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
De donde $F'\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}}=1$

7. **Considere la función** $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2}$**, definida en su dominio máximo. Para responder esta pregunta puede utilizar, <u>sin calcularlas</u>, las dos primeras derivadas de la función *f* que aparecen a continuación:**

$$f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3} \quad \text{y} \quad f''(x)=\frac{-24}{x^4}$$

a) Determine el dominio máximo de la función y los puntos de intersección con los ejes (si existen, en caso de no existir debe indicarlo) (3 puntos)

- Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$

- Intersección con eje *y*: No hay, puesto que $x = 0$ no está en el dominio.
- Intersección con eje *x*: $x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$, por lo que se tiene el punto $\left(\sqrt[3]{4}, 0\right)$

b) Determine, si existen, todas las asíntotas de la gráfica. (5 puntos)

- Verticales: Como $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-4}{x^2} = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-4}{x^2} = -\infty$, se tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- Horizontales: No hay, puesto que $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-4}{x^2} = +\infty$ y $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-4}{x^2} = -\infty$
- Oblicuas: Observe que el criterio de la función se puede escribir como $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$. Ahora, como $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$ entonces la recta $y = x$ es una recta oblicua de la función.

c) Determine los intervalos de monotonía y puntos extremos (dónde crece, dónde decrece, cuáles son los puntos máximos y mínimos relativos). (4 puntos)

Partiendo de la primera derivada de la función: $f'(x) = \frac{x^3+8}{x^3} = \frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{x^3}$ se tiene que existen dos puntos críticos donde puede haber cambio de monotonía:

- Cuando $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$, determinando el punto $\left(-2, -3\right)$
- Cuando *f '* se indefine: $x = 0$

Dado que $x^2 - 2x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, los signos de la derivada varían de la siguiente manera:

- $\forall x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]0, +\infty\right[: f'(x) > 0$, lo que quiere decir que en esos intervalos la función es creciente.
- $\forall x \in \left]-2, 0\right[: f'(x) < 0$, por lo que en este intervalo la función decrece.

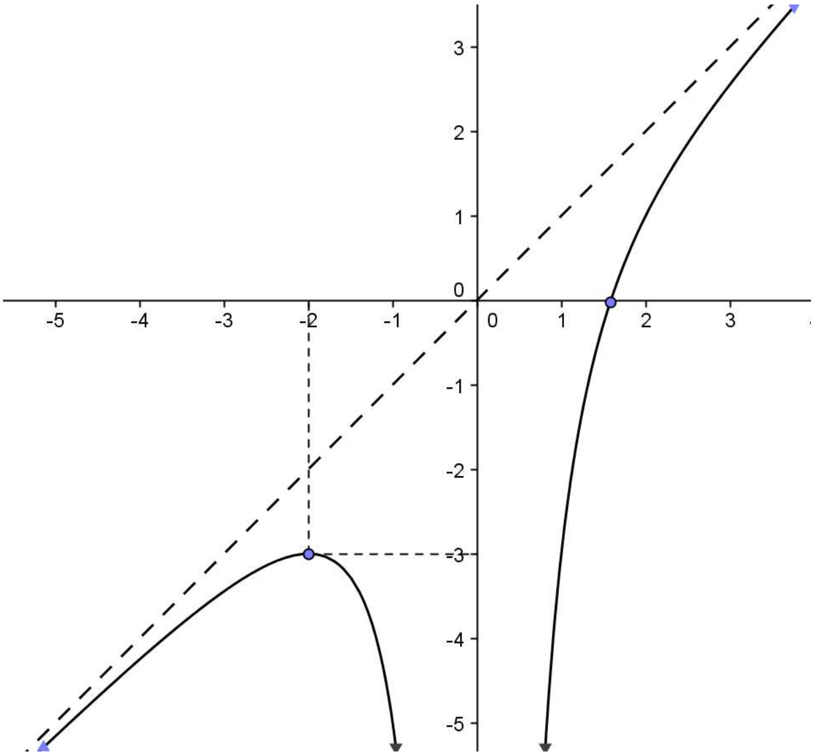
Por lo tanto, el punto $\left(-2, -3\right)$ resulta ser un máximo relativo.

d) Analice la concavidad y escriba los intervalos correspondientes. Si hay puntos de inflexión indíquelos. (2 puntos)

Partiendo de la segunda derivada de la función: $f''(x) = \frac{-24}{x^4}$, dado que esta nunca se hace 0, el único valor donde podría haber cambio de concavidad es cuando esta se indefine: $x = 0$.

Sin embargo, se tiene que esta es siempre negativa, por lo que la concavidad de la gráfica, siempre es hacia abajo.

e) Con base en la información obtenida construya la gráfica de *f* en su máximo dominio. (3 puntos)



8. Calcule las siguientes integrales: (10 puntos: 5 cada una)

a) $\int \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2x)}}dx$

Sea $u = \operatorname{sen}(2x)$ de donde $du = \cos(2x)\cdot 2dx$.

Al realizar el cambio de variable, la integral se transforma en $\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}du$

$$= \frac{1}{2}\cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C$$

Por lo tanto, en términos de x, $\int \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2x)}}dx = \sqrt{\operatorname{sen}(2x)} + C$

b) $\int t\ \sqrt[3]{t-4}\ dt$

Al tomar $u = t-4$ se obtiene $du = dt$ y $u+4 = t$, por lo que la integral resulta, con el cambio de variable: $\int (u+4)\ \sqrt[3]{u}\ du = \int \left(u^{\frac{4}{3}} + 4u^{\frac{1}{3}} \right) du\ = \dfrac{u^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + 4\cdot \dfrac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$

$$= 3\frac{u^{\frac{7}{3}}}{7} + 3u^{\frac{4}{3}} + C$$

Por lo tanto, en términos de *t*, $\int t\ \sqrt[3]{t-4}\ dt = \dfrac{3}{7}(t-4)^{\frac{7}{3}} + 3(t-4)^{\frac{4}{3}} + C$

9. Utilice sumas de Riemann para calcular la integral definida $\int_0^3 \left(9-x^2\right) dx$

(8 puntos)

Considere una partición de *n* intervalos de manera que $x_0 = 0$ y $x_n = 3$ y tales que sean del mismo ancho, es decir, de ancho $\Delta x = \dfrac{3}{n}$.

Entonces $\int_0^3 \left(9-x^2\right) dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{3i}{n}\right)\cdot\dfrac{3}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[9 - \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \right]\cdot\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[9 - \frac{9i^2}{n^2} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{9n^2 - 9i^2}{n^2} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3} \left(9n^3 - 9\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(27 - \frac{9}{2n^3}(2n^3 + 3n^2 + n) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(27 - 9 - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2} \right) = 18$$