Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

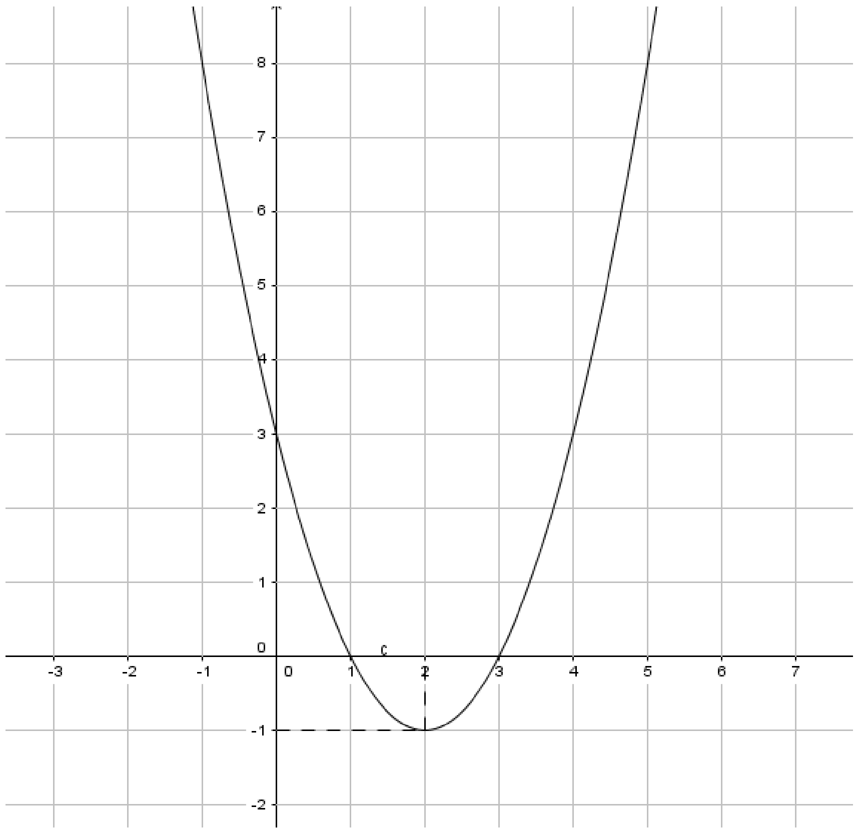
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

18 de junio de 2016

- **Este examen consta de dos partes: respuesta breve y desarrollo, para un total de 53 puntos.**

I Parte. Respuesta Breve. Considere la siguiente gráfica de la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f'(x)$. Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



1. El conjunto solución de $f''(x) > 0$: _______________

2. Un intervalo en el cual f es estrictamente creciente: _______________

3. Un intervalo en el cual f es cóncava hacia abajo: _______________

4. Un valor a tal que $f(a)$ es un máximo relativo de f: $a =$____________

5. Un valor b tal que $(b, f(b))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f: $b =$____________

II Parte. Desarrollo. Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. (5 puntos) Considere la curva definida por $x^4 + y^4 + 2 = 4xy^3$. Verifique que la recta tangente a esa curva en el punto $(-1, -1)$ es paralela al eje de las abscisas (eje X).

Solución

a. Derivar implícitamente:

$$\frac{d[x^4 + y^4 + 2]}{dx} = \frac{d[4xy^3]}{dx}$$

$$4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 4y^3 + 12xy^2\frac{dy}{dx}$$

$$(y^3 - 3xy^2)\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - x^3}{y^3 - 3xy^2}$$

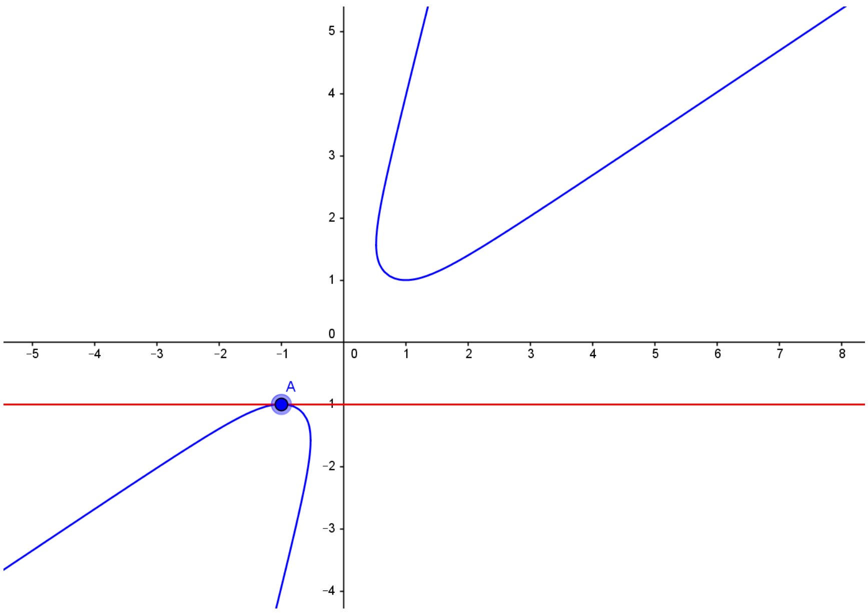
b. Calcular la pendiente de la recta tangente en el punto indicado:

Si $x = y = -1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-1)^3 - (-1)^3}{(-1)^3 - 3(-1)(-1)^2} = 0$$

c. Conclusión

Como la pendiente de la recta tangente es 0 entonces se trata de una recta paralela al eje de las abscisas.



2. Si $y = f(x)$ determine y' para cada una de las siguientes funciones.

a. (5 puntos) $y = (x+1)^{\tan x}$ con $x > -1$.

Solución

$$y = (x+1)^{\tan x}$$

$$\ln y = \ln(x+1)^{\tan x}$$

$$\ln y = \tan x \ln(x+1)$$

$$\frac{1}{y}y' = \sec^2 x \ln(x+1) + \tan x \frac{1}{x+1}$$

$$y' = y\left[\sec^2 x \ln(x+1) + \frac{\tan x}{x+1}\right]$$

$$y' = (x+1)^{\tan x}\left[\sec^2 x \ln(x+1) + \frac{\tan x}{x+1}\right]$$

b. (6 puntos) $y = \frac{\arctan(2^x + \log x)}{\arccos(e^x)}$

Solución

$$y' = \frac{\frac{1}{1+(2^x+\log x)^2}\left(2^x \ln 2 + \frac{1}{x \ln 10}\right)\arccos(e^x) - \arctan(2^x+\log x)\frac{-1}{\sqrt{1-e^{2x}}}e^x}{(\arccos(e^x))^2}$$

3. Calcule los siguientes límites:

a. (5 puntos) $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) \text{ forma } 0\cdot\infty$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}\right) \text{ forma } \frac{0}{0} \quad L'H$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\right) \text{ forma } \frac{0}{0} \quad L'H$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen} x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x}\right) = 0$$

b. (6 puntos) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$

Solución

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$ forma 1^{∞}

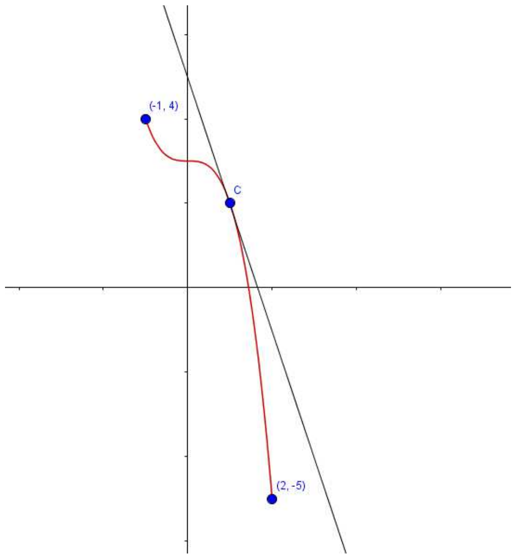
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} e^{3n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{3n}}$ forma $\frac{\infty}{\infty}$ L´H

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 3$$

Por lo tanto: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = e^{3}$

3. (3 puntos) Considere la siguiente gráfica de la función f para la cual se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Medio. En este caso, el número cuya existencia garantiza la conclusión de este teorema es 1. Enuncie las hipótesis del teorema del Valor Medio y determine la pendiente de la recta tangente a esta curva en $(1,2)$.



Solución

Hipótesis:

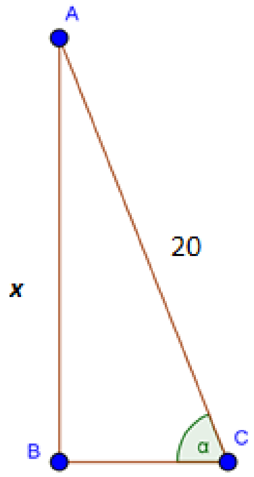
a. La función es continua en $[-1,2]$
b. La función es derivable en $]-1,2[$

Pendiente de la recta tangente en $C(1,2)$: $\frac{4--5}{-1-2} = -3$

4. Resuelva los siguientes problemas:

a. (4 puntos) La medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo disminuye a razón de $\frac{\pi}{36}\ \frac{rad}{s}$. La hipotenusa se mantiene constante y mide 20 cm. Calcule con qué rapidez cambia la medida del cateto opuesto a ese ángulo cuando este mide $\frac{\pi}{3}$ rad.

Solución



Sea α la medida del ángulo que disminuye a razón de $\frac{\pi}{36}\ \frac{rad}{s}$.

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\pi}{36}\frac{rad}{s}$$

Sea *x* la medida del cateto opuesto a este ángulo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{20} \to x = 20\operatorname{sen}\alpha$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = 20\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

Cuando $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dx}{dt} = 20\cos\frac{\pi}{3}\ \frac{-\pi}{36} = \frac{-5\pi}{18}$$

El cateto opuesto a ese ángulo disminuye a una razón de $\frac{5\pi}{18}\ \frac{cm}{s}$.

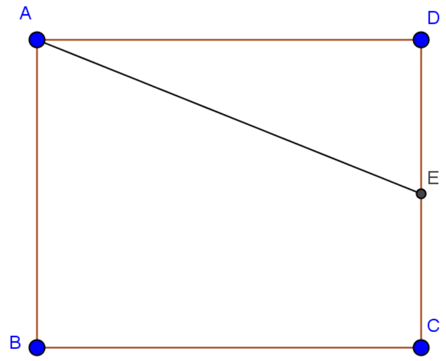
b. (7 puntos) Un rectángulo tiene área 8 cm². Se desea trazar un segmento de un vértice al punto medio de uno de los lados que no contienen a dicho vértice. ¿Cuál es la longitud mínima posible de dicho segmento?

Solución

a. Establecer la función a optimizar:

Considere un rectángulo □ABCD y sea E el punto medio del lado $\overline{CD}$. Sean $y = AD = BC$ y $x = DE$ entonces $2x = DC = AB$ con $x, y > 0$.

Como el área del rectángulo es 8 cm² entonces $2xy = 8 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$. Por el teorema de Pitágoras se cumple que $l = AC = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}$.



b. Determinar los números críticos de esa función:

$$l' = \frac{2x - \frac{32}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = 0$$

$$2x - \frac{32}{x^3} = 0$$

$$2x = \frac{32}{x^3}$$

$$x^4 = 16$$

$$x = 2$$

c. Verificar que el número crítico es el valor que minimiza la función:

$$l' = \frac{2x - \frac{32}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{x - \frac{16}{x^3}}{\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{x^4 - 16}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}}$$

Como $x > 0$ entonces $\frac{(x^2+8)(x+2)}{x^3\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}} > 0$ por lo tanto el signo de la derivada es el signo del factor $(x-2)$ el cual es negativo para $x < 2$ y positivo $x > 2$ por lo tanto cuando $x = 2$ la función alcanza un mínimo.

d. Determinar el valor mínimo de la función:

La menor longitud posible para ese segmento es $AC = \sqrt{x^2 + \frac{64}{x^2}} = \sqrt{8 + \frac{64}{8}} = 4.$

5. Considere la función definida en su dominio máximo por $f(x) = \frac{x^2-x+4}{x-1}$.

a. (2 puntos) Determine la ecuación de la asíntota oblicua de la gráfica de f.

b. (5 puntos)Trace la gráfica de f tomando en cuenta la siguiente información:

   i. La única intersección de la gráfica de f con los ejes es el punto $(0, -4)$
   ii. La recta de ecuación $x = 1$ es asíntota vertical de la gráfica de f.
   iii. El conjunto solución de $f'(x) > 0$ es $]-\infty, -1[\, \cup \,]3, +\infty[$
   iv. El conjunto solución de $f''(x) < 0$ es $]-\infty, 1[$
   v. $f(-1) = -3$ y $f(3) = 5$

Solución

a. Como $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-x+4}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+4}{x^2-x} = 1$ y $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-x+4}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+4-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ entonces la recta de ecuación $y = x$ es asíntota oblicua de la gráfica de f.

b. En la gráfica debe reflejarse lo siguiente:

Dato	Se refleja en la gráfica como
i. La única intersección con los ejes de la gráfica de f es el punto $(0, -4)$	Intersección con el eje Y: $(0, -4)$ No hay intersecciones con el eje X.
ii. La recta de ecuación $x = 1$ es asíntota vertical de la gráfica de f.	La gráfica debe ser asintótica a esa recta vertical.
iii. El conjunto solución de $f'(x) > 0$ es $]-\infty, -1[\, \cup \,]3, +\infty[$	La función es decreciente en $]-1,1[$ y $]1,3[$. La función es creciente en $]-\infty, -1[$ y $]3, +\infty[$.
iv. El conjunto solución de $f''(x) < 0$ es $]-\infty, 1[$	La función es cóncava hacia arriba en $]1, +\infty[$ La función es cóncava hacia abajo en $]-\infty, 1[$
v. $f(-1) = -3$ y $f(3) = 5$	$f(-1) = -3$ es un máximo relativo. $f(3) = 5$ es un mínimo relativo.

La gráfica es asintótica a la recta de ecuación $y = x$.