Instituto Tecnológico de Costa Rica
Universidad de Costa Rica

Solución II Parcial
Cálculo I

07 de octubre de 2015

1. Determine una función f tal que $f(-1)=-3$; $f'(-1)=-10$ y $f''(x)=24+4e^{2(x+1)}$

   Nótese que
   $\displaystyle\int f''(x)dx=\int\left(24+4e^{2(x+1)}\right)dx$
   $\Rightarrow f'(x)=24x+2e^{2(x+1)}+K$

   Como $f'(-1)=-10$ se sigue que $-10=-24+2+K$, ie, $K=12$

   De forma análoga $\displaystyle\int f'(x)dx=\int\left(24x+2e^{2(x+1)}+12\right)dx$
   $\Rightarrow f(x)=12x^2+12x+e^{2(x+1)}+K_1$

   Como $f(-1)=-3$ se sigue que $-3=12-12+1+K_1$, ie, $K_1=-4$

   Así $f(x)=12x^2+12x+e^{2(x+1)}-4$

2. Calcule las siguientes integrales

   a) $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$

   Nótese que $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx=\int\frac{\cos^2 x\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}dx=\int\frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$

   Se hace sustitución
   $u=\operatorname{sen} x$
   $du=\cos x dx$

   Así $\displaystyle\int\frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}dx=\int\frac{1-u^2}{u^4}du=\int u^{-4}-u^{-2}du=-\frac{1}{3u^3}+\frac{1}{u}+C_1$

Luego $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx = -\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C$

b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{7x+3}{x^3+3x}dx$

Se calcula la integral $\displaystyle\int \frac{7x+3}{x^3+3x}dx$ por fracciones parciales

$$\frac{7x+3}{x\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3} \Rightarrow 7x+3 = A\left(x^2+3\right) + (Bx+C)x$$

Si $x=0$ se sigue que $A=1$

Si $x=1$ se sigue que $B+C=6$ y si $x=-1$ se tiene que $B-C=-8$

Así

$$\begin{aligned}
&\int \frac{7x+3}{x^3+3x}dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{7-x}{x^2+3}\right) dx \\
&= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+3}dx + \int \frac{7}{x^2+3}dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + \frac{7\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{7x+3}{x^3+3x}dx = \ln\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln 6 + \frac{7\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{7\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{6} = \ln\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{3}\pi}{36}$$

c) $\displaystyle\int w^3 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{w}\right) dw$

Se integra por partes

$u = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{1}{w}\right) \qquad du = -\dfrac{1}{w\sqrt{w^2-1}}dw$

$dv = w^3 dw \qquad v = \dfrac{w^4}{4}$

Así $\int w^3 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{w}\right) dw = \frac{w^4}{4} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{w}\right) + \frac{1}{4}\int \frac{w^3}{\sqrt{w^2-1}} dw \ (*)$

Cálculo de $\int \frac{w^3}{\sqrt{w^2-1}} dw$

$y = w^2 - 1$
$dy = 2wdw$

Luego $\int \frac{w^3}{\sqrt{w^2-1}} dw = \frac{1}{2}\int \frac{y+1}{\sqrt{y}} dy = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{1}{2}} + K = \frac{(w^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + \sqrt{w^2-1} + K \ (**)$

De $(*)$ y $(**)$ se sigue que:

$$\int w^3 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{w}\right) dw = \frac{w^4}{4} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{w}\right) + \frac{1}{4}\left[\frac{(w^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + \sqrt{w^2-1}\right] + C$$

d) $\int \frac{y+3}{\sqrt{3+4y-4y^2}} dy$

Completando cuadrados se tiene que $3 + 4y - 4y^2 = 4 - (2y-1)^2$

Se realiza la siguiente sustitución trigonométrica

$2y - 1 = 2\operatorname{sen}\theta \ (*)$
$2dy = 2\cos\theta d\theta$

Así
$$\int \frac{y+3}{\sqrt{3+4y-4y^2}} dy$$

$$= \int \frac{\frac{2\operatorname{sen}\theta + 1}{2} + 3}{\sqrt{4 - 4\operatorname{sen}^2\theta}} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2sen\theta + 7}{\sqrt{\cos^2\theta}} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int (2sen\theta + 7) d\theta$$

$$= -\frac{\cos\theta}{2} + \frac{7\theta}{4} + C$$

De $(*)$ se tiene que $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{2y-1}{2}\right)$ y $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3+4y-4y^2}}{2}$

Luego $\displaystyle\int \frac{y+3}{\sqrt{3+4y-4y^2}}dy = -\frac{\sqrt{3+4y-4y^2}}{4} + \frac{7}{4}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2y-1}{2}\right) + C$

3. Determine si las siguientes integrales convergen o divergen.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ $p > 1$ Al usar la definición de integral impropia se tiene que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\left(\int_1^t \frac{dx}{x^p}\right)$

Se calcula primero la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{x^p}$

$$\int \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} + C$$

Así $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(\int_1^t \frac{dx}{x^p}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$

Luego si $p > 1$ entonces $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t^{1-p}}{1-p} = 0$ y entonces $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-p}$

$\therefore$ Si $p > 1$ la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge a $\dfrac{1}{1-p}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\int_t^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx\right) \ (\star)$$

Se calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$

Por sustitución

$u = e^x - 1$
$du = e^x dx$

Luego $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C_1 \ (\star\star)$

De $(\star)$ y $(\star\star)$ se sigue que

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\int_t^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx\right) = \lim_{t\to 0^+} \ln|e-1| - \ln\left|e^t-1\right| = \infty$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx \text{ diverge}$$

4. Suponga que f es una función cuya primera derivada es continua en $[a,b]$; $f(a) = f(b) = 0$ y $\int_a^b f^2(x)dx = 1$. Pruebe que $\int_a^b xf(x)f^{'}(x)dx = -\frac{1}{2}$

   Primero se resuelve la integral $\int xf(x)f^{'}(x)dx$ utilizando integración por partes.

   $u = x \qquad du = dx$

   $dv = f(x)f^{'}(x)dx \qquad v = \dfrac{f^2(x)}{2}$

   Así

   $$\int xf(x)f^{'}(x)dx = \frac{xf^2(x)}{2} - \frac{1}{2}\int f^2(x)dx \ (*)$$

   De $(*)$ se sigue que:
   $$\int_a^b xf(x)f^{'}(x)dx = \frac{bf^2(b)}{2} - \frac{af^2(a)}{2} - \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$$
   $= -\frac{1}{2}$ pues por hipótesis $f(a) = f(b) = 0$ y $\int_a^b f^2(x)dx = 1$

   $$\therefore \int_a^b xf(x)f^{'}(x)dx = -\frac{1}{2}$$