Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

SOLUCIÓN CUARTO EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO

Miércoles 8 de octubre de 2014

1. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2}\left[\csc^2(\theta)-2\sec^2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta$ *(4 puntos)*

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta)}-\frac{2}{\cos^2(\theta)}\right]\mathrm{d}\theta=$$
$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\theta-\int \tan^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta=$$
$$\frac{\theta}{2}-\int\left[\sec^2(\theta)-1\right]\mathrm{d}\theta=$$
$$\frac{\theta}{2}-\tan(\theta)+\theta+C=$$
$$\frac{3\theta}{2}-\tan(\theta)+C$$

b) $\int \frac{\ln\left[\tan(\alpha)\right]}{\cos^2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha$. *(6 puntos)*

Sea $y=\tan(\alpha)\Rightarrow \mathrm{d}y=\sec^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$,

luego $\int \frac{\ln\left[\tan(\alpha)\right]}{\cos^2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha=\int \ln(y)\,\mathrm{d}y$.

Luego sea $u=\ln(y)\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{y}\mathrm{d}y$ y $\mathrm{d}v=\mathrm{d}y\Rightarrow v=y$, entonces se tiene $\int \ln(y)\,\mathrm{d}y=\ln(y)\,y-\int y\cdot\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\ln(y)\,y-\int \mathrm{d}y=\ln(y)\,y-y+C$

Regresando a la variable original se tiene que

$$\int \frac{\ln\left[\tan(\alpha)\right]}{\cos^2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha=\ln\left[\tan(\alpha)\right]\cdot\tan(\alpha)-\tan(\alpha)+C$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+12x+7}}\,\mathrm{d}x$ *(5 puntos)*

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+12x+7}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{7-\left(4x^2-12x\right)}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{7-\left(4x^2-12x+9\right)+9}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{16-\left(2x-3\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4^2-\left(2x-3\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

Sea $2x-3=4\operatorname{sen}(\alpha) \Rightarrow 2\mathrm{d}x = 4\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$, entonces

$$\int \frac{1}{\sqrt{4^2-\left(2x-3\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{4^2-4^2\operatorname{sen}^2(\alpha)}}\,2\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4^2\left[1-\operatorname{sen}^2(\alpha)\right]}}\,2\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int \frac{1}{\sqrt{4^2\cos^2(\alpha)}}\,2\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$\int \frac{1}{4\cos(\alpha)}\,2\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\alpha + C = \frac{\alpha}{2}+C$$

Luego al regresar a la variable original se tiene que

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+12x+7}}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2x-3}{4}\right)}{2}+C$$

Otra forma en la que se puede hacer

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+12x+7}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{7-\left(4x^2-12x\right)}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{7-\left(4x^2-12x+9\right)+9}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{16-(2x-3)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4^2-(2x-3)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4^2\left[1-\left(\frac{2x-3}{4}\right)^2\right]}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{4\sqrt{\left[1-\left(\frac{2x-3}{4}\right)^2\right]}}\,\mathrm{d}x$$

Sea $\frac{2x-3}{4} = y \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y$, entonces

$$\int \frac{1}{4\sqrt{\left[1-\left(\frac{2x-3}{4}\right)^2\right]}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(y\right)+C$$

Luego al regresar a la variable original se tiene que

$$\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+12x+7}}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-3}{4}\right)}{2}+C$$

d) $\int \frac{x^5-1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ *(7 puntos)*

Como el integrando tiene la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador, entonces

$$\begin{array}{r|l} x^5-1 & x^4-1 \\ \cline{2-2} -x^5+x & x \\ \hline x-1 & \end{array}$$

Luego $\frac{x^5-1}{x^4-1} = x + \frac{x-1}{x^4-1}$.

Note que $\frac{x-1}{x^4-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$, al descomponer en fracciones parciales

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)=1$$

Si $x=-1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

Si $x=0 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

Si $x=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

Luego

$$\int \frac{x^5-1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int x + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

2. Utilice la sustitución $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ para mostrar que $\int \sec(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left[\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]+C$. *(7 puntos)*

Se tiene que $\int \sec(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

Si $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, también se sabe que $\cos(x)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, así

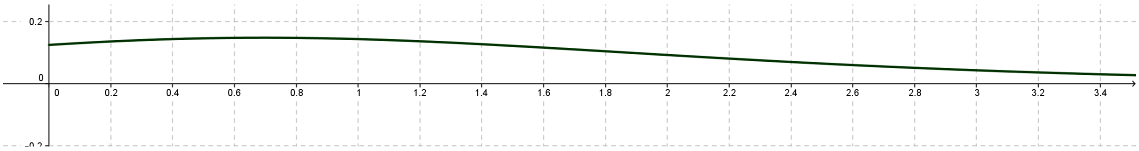
$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\int\frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u$. Al descomponer $\frac{1}{1-u^2}$ en fracciones parciales se tiene que $\frac{1}{1-u^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-u}+\frac{\frac{1}{2}}{1+u}$, entonces

$$2\int\frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = 2\int\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\,\mathrm{d}u = -\ln|1-u|+\ln|1+u|+C = \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$$

Al regresar a la variable original se tiene que

$$\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C = \ln\left[\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]+C$$

3. Sea $h:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=\dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^3}$, cuya gráfica se presenta a continuación



Con base en la información, demuestre que el área acotada por la gráfica de h, el eje x y $x=0$ es igual a $\dfrac{3}{8}$. *(7 puntos)*

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^3}\mathrm{d}x=\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^3}\mathrm{d}x$, luego $\displaystyle\int_0^M \frac{e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^3}\mathrm{d}x$, al realizar la sustitución $u=e^x+1\Rightarrow \mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x$, entonces $\displaystyle\int_2^{e^M+1}\frac{u-1}{u^3}\mathrm{d}u=\left[\frac{-1}{u}+\frac{1}{2u^2}\right]_2^{e^M+1}=$

$\displaystyle\frac{-1}{e^M+1}+\frac{1}{2(e^M+1)^2}-\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{8}\right)=\frac{-1}{e^M+1}+\frac{1}{2(e^M+1)^2}+\frac{3}{8}$. Ahora al calcular

$\displaystyle\lim_{M\to\infty}\left[\frac{-1}{e^M+1}+\frac{1}{2(e^M+1)}+\frac{3}{8}\right]=0+0+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$, por lo tanto el área de la región sombreada es $\dfrac{3}{8}$.

4. Determine si la siguiente integrale impropia converge o diverge. En caso de que converja calcule su valor. *(8 puntos)*

Note que $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ se indefine en $x=0$, entonces se define $I=\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to 0^+}\left[\int_b^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right]$.

Calculemos primero $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, donde al aplicar integración por partes se tiene :

$u=\ln(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}v=x^{\frac{-1}{2}}\mathrm{d}x\Rightarrow v=2\sqrt{x}$, así

$$\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\ln(x)-2\int x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\ln(x)-2\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=$$

$$2\sqrt{x}\ln(x)-2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}\ln(x)-4x^{\frac{1}{2}}+C$$

Entonces

$$I=\lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\ln(x)-4x^{\frac{1}{2}}\right]_b^1=\lim_{b\to 0^+}\left[\left(2\cdot 1\cdot\ln(1)-4\cdot 1\right)-\left(2b^{\frac{1}{2}}\cdot\ln(b)-4b^{\frac{1}{2}}\right)\right]=$$

$$\lim_{b\to 0^+}\left[-4-2b^{\frac{1}{2}}\cdot\ln(b)+4b^{\frac{1}{2}}\right]$$

Se debe mostrar que $\lim_{b\to 0^+}\left[b^{\frac{1}{2}}\cdot\ln(b)\right]=k\in\mathbb{R}$. Note que al evaluar se tiene

que $\lim_{b\to 0^+}\left[b^{\frac{1}{2}}\cdot\ln(b)\right]=0\cdot\infty$, ahora bien $\lim_{b\to 0^+}\left[b^{\frac{1}{2}}\cdot\ln(b)\right]=\lim_{b\to 0^+}\left[\frac{\ln(b)}{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}}\right]=\frac{\infty}{\infty}$, por lo tanto se procede a calcular el límite aplicando el teorema de L'Hopital

$$\lim_{b\to 0^+}\left[\frac{\ln(b)}{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}}\right]=\lim_{b\to 0^+}\left[\frac{\frac{1}{b}}{\frac{-1}{2b^{\frac{3}{2}}}}\right]=\lim_{b\to 0^+}\left[\frac{2b^{\frac{3}{2}}}{-b}\right]=\lim_{b\to 0^+}\left[-2b^{\frac{1}{2}}\right]=0.$$

Como este limite existe, entonces

$$\lim_{b\to 0^+}\left[-4-2b^{\frac{1}{2}}\cdot\ln(b)+4b^{\frac{1}{2}}\right]=-4-2\lim_{b\to 0^+}\left[b^{\frac{1}{2}}\cdot\ln(b)\right]+4\lim_{b\to 0^+}b^{\frac{1}{2}}=-4-2\cdot 0+4\cdot 0=-4$$

Por lo tanto I converge a -4.