Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2010

PROYECTO MATEM
-Matemática en la Enseñanza Media-

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL

Undécimo año

I EXAMEN PARCIAL 2010

Nombre: ____

Colegio: ____

Código: ____

FÓRMULA 1

Sábado 24 de abril, 2010

INSTRUCCIONES

- Lea cuidadosamente, las instrucciones y las preguntas, antes de contestar.
- Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única y está constituida por 31 ítems (31 puntos); y la segunda es de desarrollo y la conforman 3 ítems (14 puntos).
- La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto. Debe llenar ésta con la información que se le solicita.
- En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
- **En la hoja de respuestas en que responde los ítems de selección**, usted debe **rellenar con lápiz la celda** que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.
- **En los ítems de desarrollo, debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos.
- En el desarrollo utilice únicamente bolígrafo azul o negro. Si el **desarrollo contiene** partes escritas con **lápiz** usted **pierde el derecho a reclamar**.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.
- Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
- **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**
- Tiempo para realizarlo: **3 horas**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 31 puntos)**

Puede utilizar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, solamente se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja de respuestas. Vale un punto cada respuesta correcta.

1) Si $P(x) = x^2 + m^2 - 2mx + 5x - 5m + 6$, entonces una solución de la ecuación $P(x) = 0$ es

a. m
b. $m-2$
c. $m-5$
d. $\dfrac{5m-6}{5}$

2) Sea $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde las constantes $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, entonces con certeza la ecuación $P(x) = 0$

a. tiene exactamente tres soluciones.
b. tiene al menos una solución real.
c. tiene solamente soluciones racionales
d. no tiene solución.

3) Si 2 y $m-1$ son los ceros de un polinomio $P(x)$ entonces con certeza la ecuación $P(x) = 0$ es

a. $x^2 - 3x + mx - 2m + 2 = 0$
b. $x^2 - x - mx + 2m - 2 = 0$
c. $x^2 - 3x - mx + 2m + 2 = 0$
d. $x^2 + mx - 2 = 0$

4) Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio, donde las constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si $\{n_3, n_2, n_1\}$ es el conjunto solución de la ecuación $P(x) = 0$, entonces la expresión $3 - P(n_1) - 4P(n_2) + 2P(n_3) + \sqrt{2}$ es igual a

a. 0
b. 3
c. $\sqrt{2} - 7$
d. $\sqrt{2} + 3$

5) Una solución de $2x^2 = 4 - \dfrac{x(x+3)}{2}$ es

a. -1

b. $\dfrac{-8}{5}$

c. $\sqrt{\dfrac{11}{5}}$

d. $\dfrac{-3+\sqrt{89}}{10}$

6) Si la ecuación $ax^2 + x + c = 0$, donde $a, c \in \mathbb{R}$, no tiene solución, entonces con certeza se cumple que

a. $-1 < ac < 0$
b. $ac < 0$
c. $ac > 0$
d. $ac = 0$

7) Si $a \in \mathbb{R}$ y el conjunto solución de la inecuación $ax < 4 + 2x$, es $\left]\dfrac{4}{a-2}, +\infty\right[$ entonces el valor de a debe ser con certeza

a. mayor que 2
b. menor que 2
c. igual a 2
d. negativo

8) Considere la inecuación $x^2 - ax - x + a < 0$, donde $a \in \mathbb{R}$. Si $x < 1$ entonces se puede afirmar que

a. $x > a$
b. $x < a$
c. $x = a$
d. $x = 0$

9) El conjunto solución de la inecuación $\dfrac{-2x-4}{x^2-4} \geq 0$ es

a. $]-\infty, 2[- \{-2\}$

b. $]-\infty, -2[$

c. $]2, +\infty[$

d. $\varnothing$

10) El conjunto solución de la inecuación $-x^3+3x^2-16x+48>0$ es el conjunto

a. $\left]-\infty,3\right[$
b. $\left]3,+\infty\right[$
c. $\left]-\infty,-4\right[\cup\left]3,4\right[$
d. $\left]-4,3\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

11) La ecuación fraccionaria $\dfrac{1+\dfrac{x}{x-1}}{1-\dfrac{x}{x-1}}=-2x+1$, tiene como conjunto solución

a. $\varnothing$
b. $\mathbb{R}$
c. $\mathbb{R}-\{1\}$
d. $\mathbb{R}-\{0,1\}$

12) El número de soluciones distintas que tiene la ecuación $\dfrac{3}{x^2}+3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$ es

a. 0

b. 1

c. 2

d 3

13) Si $\dfrac{\left(x^2+k\right)\left(x-1\right)}{x+1}<0$, en el intervalo $\left]-1,1\right]$, donde x es la incógnita de la inecuación y k es una constante, entonces se puede afirmar que

a. $k\in\left[0,+\infty\right[$
b. $k\in\left]0,+\infty\right[$
c. $k\in\left]-\infty,0\right[$
d. $k\in\mathbb{R}$

14) Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P(x)>0$, para todo $x>0$ y $Q(x)$ otro polinomio. Si se cumple que $P(x)\cdot Q(x)>0$ en el intervalo $]-3,3[$ entonces se garantiza que

a. $Q(1)>0$

b. $Q(2)<0$

c. $Q(-1)>0$

d. $Q(-2)=0$

15) La ecuación $-3+\sqrt{5x-1}=-x$ tiene

a. cero soluciones reales
b. una única solución real
c. dos soluciones racionales distintas
d. dos soluciones irracionales distintas

16) Si $c>0$ el conjunto solución de la ecuación $-\left|x^2-3\right|-c=0$ es

a. $\varnothing$
b. $\{0\}$
c. $\{-c-3, c+3\}$
d. $\left\{-\sqrt{c+3}, \sqrt{c+3}\right\}$

17) El conjunto solución de $|2-5x|\leq 3$ corresponde a

a. $\left[\frac{-1}{5}, 1\right]$

b. $\left[-1, \frac{1}{5}\right]$

c. $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right[\cup]1, +\infty[$

d. $]-\infty, -1[\cup \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$

18) Sea $\varepsilon > 0$, se puede afirmar que la inecuación con valor absoluto $\left|(-4x+1)-(-4\cdot 2+1)\right| < \varepsilon$ es equivalente a la desigualdad

a. $-\varepsilon < \dfrac{x-2}{4} < \varepsilon$

b. $-\varepsilon < x-2 < \dfrac{\varepsilon}{4}$

c. $-\dfrac{\varepsilon}{4} < x-2 < \dfrac{\varepsilon}{4}$

d. $-\varepsilon + 2 < 4x < \varepsilon + 2$

19) Considere el problema: *"La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide* $\sqrt{29}$ *cm. Halle la medida de los catetos si estos suman 7 cm."* Si x es la medida de uno de los catetos, una ecuación que permite resolver el problema anterior es

a. $2x^2 - 14x + 20 = 0$

b. $2x^2 + 14x + 20 = 0$

c. $2x^2 + 14x + \sqrt{20} = 0$

d. $2x^2 - 14x + 49 - \sqrt{29} = 0$

20) Considere el problema: *"Juan tiene dos terrenos A y B, ambos de forma rectangular. En el terreno A el largo mide 7 m más que el ancho. En el terreno B, el largo mide 2 m más que el largo del terreno A y el ancho 3 m menos que el ancho del terreno A. Si el área del terreno B es 37* m^2 *menor que el área del terreno A, determine las medidas de los lados de ambos terrenos"*. Si x es el ancho del terreno *A*, una ecuación que permite resolver el problema anterior es

a. $\left[(x+7)+2\right](x-3) = x(x+7)+37$

b. $\left[(x+7)+2\right](x-3)+37 = x(x+7)$

c. $x(x+7)+37 = (x-3)(x+2)$

d. $x(x+7) = (x-3)(x+2)+37$

21) Los elementos del conjunto F son pares ordenados que determinan una relación entre los elementos de los conjuntos $D=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{1,2,3\}$. Si esta relación es una función con dominio el conjunto D, entonces el conjunto F puede ser

a. $F=\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3)\}$

b. $F=\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

c. $F=\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\}$

d. $F=\{(4,1),(3,1),(1,3),(1,2)\}$

22) ¿Cuáles de las siguientes relaciones corresponden a una función?

$f: IR \to IR,\quad f(x)=\sqrt{x}$

$g:]2,5[\to IR,\quad f(x)=\sqrt{x}$

$h: IN \to IR,\quad f(x)=\sqrt{x}$

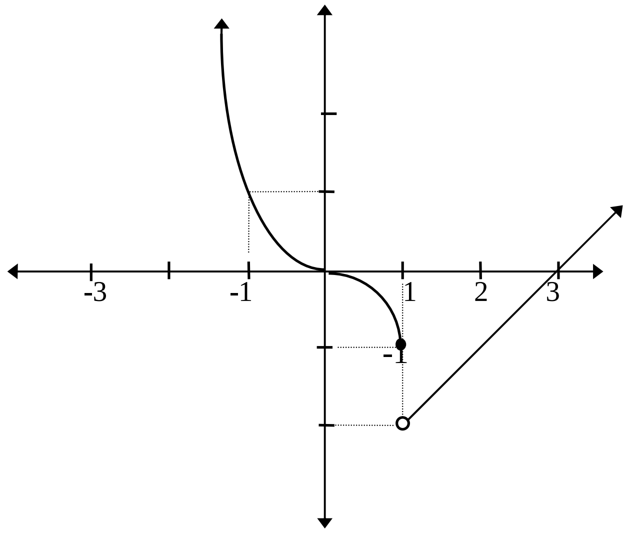
a. Todas

b. Solamente *g*

c. Solamente *h*

d. Solamente *g* y *h*

23) Si la gráfica adjunta es la de la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, entonces esta función se define de la siguiente manera



a. $f(x)=\begin{cases}-x^3 & si \quad x\leq 1\\ x+3 & si \quad x>1\end{cases}$

b. $f(x)=\begin{cases}-x^3 & si \quad x\leq 1\\ 2x+3 & si \quad x>1\end{cases}$

c. $f(x)=\begin{cases}x^3 & si \quad x\leq 1\\ x-3 & si \quad x>1\end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases}-x^3 & si \quad x\leq 1\\ x-3 & si \quad x>1\end{cases}$

24) Considere la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ cuyo criterio es $f(x)=-x^2+2$, si $a\in\mathbb{R}$, entonces $f(a)-f(-a)$ es

a. 0
b. 4
c. $2a^2$
d. $-2a^2$

25) Sea la función $f:\left]-1,4\right]\rightarrow\mathbb{R}$ cuyo criterio es $f(x)=x^2+3x-4$, entonces la preimagen de 0 es el número

a. -4
b. 4
c. 1
d. 0

26) Sea f una función creciente en el intervalo $\left]-\frac{5}{2},4\right[$ tal que $f\left(-1\right)=1$, analice las siguientes afirmaciones:

I. $f\left(1\right)<0$

II. $f\left(-2\right)\leq f\left(0\right)$

Se puede asegurar con certeza que

a. ambas son verdaderas
b. ambas son falsas
c. I es falsa y II es verdadera
d. I es verdadera y II es falsa

27) Sea $h:A\rightarrow B$ una función tal que la relación entre los conjuntos A,B se establece con los pares ordenados del conjunto $\left\{(a,c),(c,d),(d,e),(e,a)\right\}$, entonces $g(g(g(c)))$ es igual a

a. a

b. c

c. d

d. e

28) Considere las funciones $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}+1$ y $m(x)=x$ definidas en su respectivo dominio máximo. La función $h\left(x\right)=m(x)+(g\circ f)(x)$ es igual a

a. $h(x)=2x+2$, $h:IR\rightarrow IR$

b. $h(x)=2x+2$, $h:IR-\left\{-1,1\right\}\rightarrow IR$

c. $h(x)=x+\dfrac{x}{2x+1}$, $h:IR-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\rightarrow IR$

d. $h(x)=x+\dfrac{x}{2x+1}$, $h:IR-\left\{-\dfrac{1}{2},0\right\}\rightarrow IR$

29) Considere la función biyectiva *f: A*$\rightarrow$ *B,* definida por $f(x)=x^2-2kx-k$. Si $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)=-1$, entonces el valor de k es

a. -1

b. $\sqrt{2}$

c. $2\sqrt{2}$

d. $\sqrt{2}-1$

30) Para la función biyectiva $f:\left[0,2\right[\rightarrow\left[2,4\right[$ dada por $f\left(x\right)=\dfrac{-x^2}{2}+4$, el criterio de su inversa corresponde a

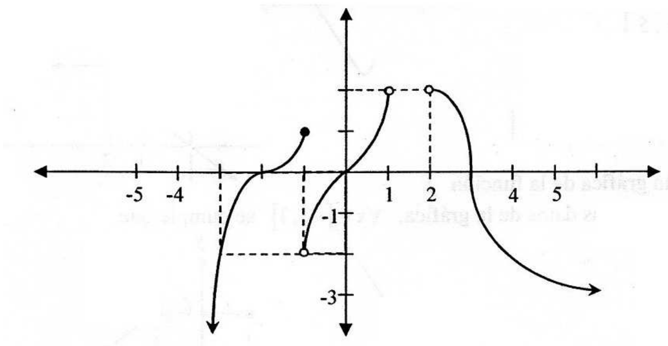
a. $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{2x}-8$

b. $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{2x}-4$

c. $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{-2x+8}$

d. $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{-2x+4}$

31) Con base en la gráfica de la función f :



Se puede determinar que el dominio de f es el conjunto

a. $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]2,+\infty[$

b. $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

c. $]-\infty,2[$

d. $\mathbb{R}$

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
PROYECTO MATEM 2010

Sábado 24 de abril, 2010
Primer Examen Parcial
Tiempo Probable: 3 horas

NOMBRE DEL ALUMNO: ____

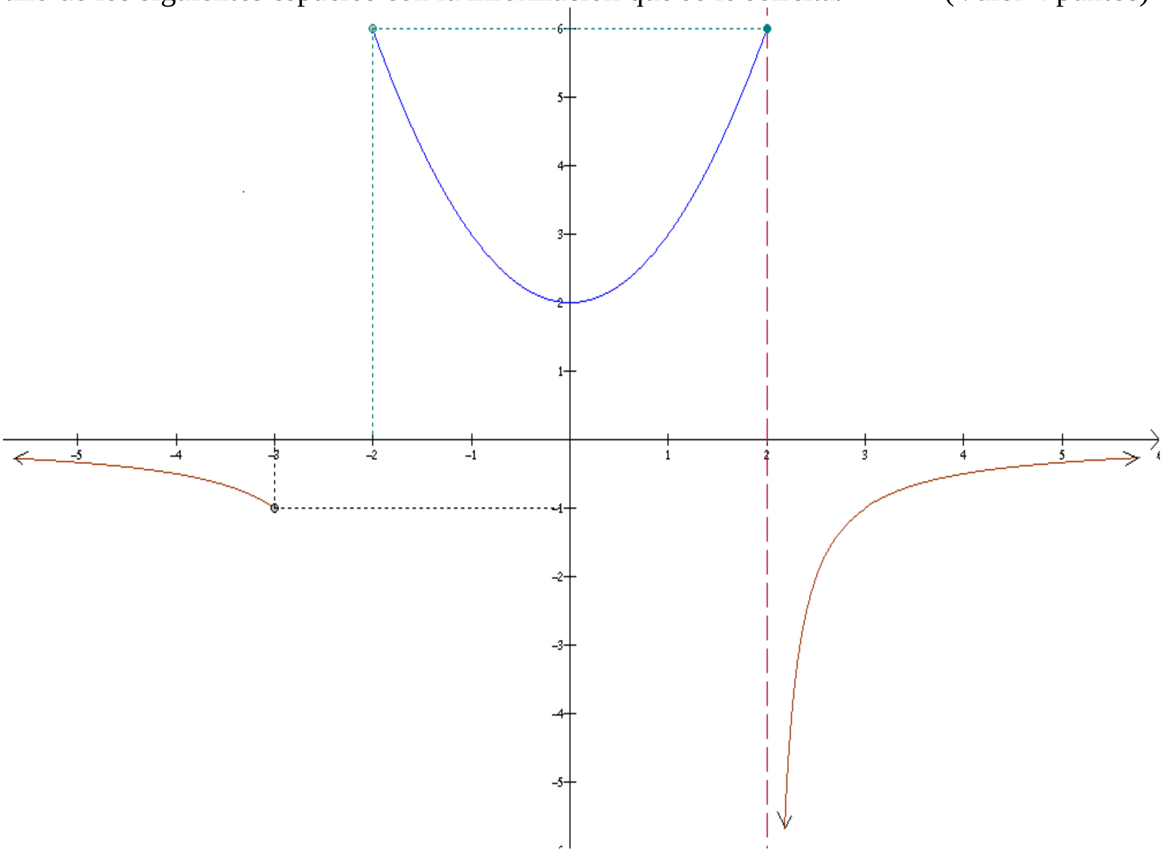
CÓDIGO: ____

COLEGIO: ____

SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor total 14 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1) Considere la función $f : A \rightarrow B$, que se grafica como se muestra abajo, y complete cada uno de los siguientes espacios con la información que se le solicita. (Valor 4 puntos)



a. El dominio de *f* es el siguiente conjunto: ______________________________

b. El rango de *f* es el siguiente conjunto: ______________________________

c. *f* es decreciente en el siguiente conjunto: ______________________________

d. *f* es positiva en el siguiente conjunto: ______________________________

2) Determine (en $\mathbb{R}$) el conjunto solución de la siguiente ecuación: (Valor 5 puntos)

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+3}=0$$

3) Una ventana tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto (ver la figura adjunta). Si el perímetro de la ventana es 15m, exprese el área de la ventana como una función de su ancho. (Valor 4 puntos el criterio, 1 punto el dominio).