



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica



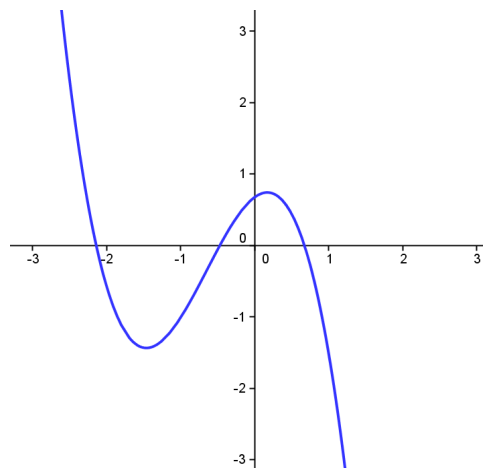
MATEM 2012

-Undécimo Año-

I EXAMEN PARCIAL 2012

Nombre: _____ código: _____

Colegio: _____



Fórmula

1

Sábado 28 de abril de 2012

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección única (30 puntos), la segunda es de análisis de gráfica (7 puntos) y la tercera es de desarrollo (18 puntos).
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará.**
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 30 puntos)

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. Una de las soluciones de la ecuación $x^2(x-4)+(x-4)x=0$ corresponde a

- (A) -4
- (B) -1
- (C) 1
- (D) 2

2. El conjunto solución de $2x^3 + x^2 - 13x = -6$ corresponde a

- (A) $\left\{\frac{1}{2}, 3, 2\right\}$
- (B) $\left\{\frac{1}{2}, -3, 2\right\}$
- (C) $\left\{\frac{-1}{2}, -3, 2\right\}$
- (D) $\left\{\frac{-1}{2}, -3, -2\right\}$

3. La cantidad de elementos del conjunto solución de la ecuación $(x^2 + x + 4) \cdot (x^2 + 3) = 0$ es

- (A) 4
- (B) 2
- (C) 1
- (D) 0

4. Una solución de $\frac{x}{1-x} = \frac{x}{x-3}$ es

- (A) 0
- (B) $\sqrt{3}$
- (C) -2
- (D) $-\sqrt{3}$

5. La ecuación $\frac{3x+1}{x+1} - 2 = \frac{x-1}{x+1}$, tiene como conjunto solución

- (A) \emptyset
- (B) \mathbb{R}
- (C) $\mathbb{R} - \{-1\}$
- (D) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

6. La solución de la ecuación $\frac{x}{x-4} = 1 + \frac{1}{x}$ corresponde a

- (A) $\frac{4}{3}$
- (B) $\frac{3}{4}$
- (C) $\frac{-4}{3}$
- (D) $\frac{-3}{4}$

7. La ecuación $-6x^2 - 5x + 4 = 0$ tiene

- (A) cero soluciones.
- (B) dos soluciones positivas.
- (C) dos soluciones negativas.
- (D) una solución negativa y una positiva.

8. Si $x = -\frac{1}{2}$ es una solución de la ecuación $3nx^2 - x - n = 0$ entonces la otra solución es

- (A) 2
- (B) -2
- (C) $\frac{2}{3}$
- (D) $-\frac{2}{3}$

9. El conjunto solución de $(2x - 8)^2 \leq 0$ corresponde a

- (A) $] -\infty, 4]$
- (B) $[4, +\infty[$
- (C) $\{4\}$
- (D) \emptyset

10. Considere las siguientes desigualdades

I. $x^2 + 4x > 0$

II. $x^2 + 4 > 0$

III. $-x^2 - 4 < 0$

IV. $-x^2 < 0$

De ellas tienen como conjunto solución \mathbb{R}

- (A) II y III únicamente
- (B) I y IV únicamente
- (C) I, II y III únicamente
- (D) II, III y IV únicamente

11. El conjunto solución de $|x - 2| \leq 3$ corresponde a

- (A) $[-5, 1]$
- (B) $[-1, 5]$
- (C) $]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$
- (D) $]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$

12. El conjunto solución de $\frac{5}{2x-1} \leq x-2$ corresponde a

- (A) $]-\infty, \frac{-1}{2}] \cup \left[\frac{1}{2}, 3\right]$
- (B) $]-\infty, \frac{-1}{2}[\cup]3, +\infty[$
- (C) $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\cup [3, +\infty[$
- (D) $]-\infty, \frac{-1}{2}] \cup \left]\frac{1}{2}, 3\right]$

13. El conjunto solución de $-5x^2 + 23x - 12 \leq 0$ corresponde a

- (A) $\left[\frac{3}{5}, 4\right]$
(B) $\left[-4, \frac{-3}{5}\right]$
(C) $\left]-\infty, \frac{3}{5}\right] \cup [4, +\infty[$
(D) $\left]-\infty, -4\right] \cup \left[\frac{3}{5}, +\infty\right[$

14. La ecuación $|3x - 1| = \frac{5}{2}$ tiene

- (A) cero soluciones.
(B) dos soluciones positivas.
(C) dos soluciones negativas.
(D) una solución negativa y una positiva.

15. El conjunto solución de $\frac{(-2+x)^3(x-5)^7}{2x+3} < 0$ es

- (A) $\left]-\infty, \frac{-3}{2}\right[\cup]2, 5[$
(B) $\left]\frac{-3}{2}, 2\right[\cup]5, +\infty[$
(C) $\left]-\infty, -2\right[\cup]5, +\infty[$
(D) $\left]-\infty, -2\right[\cup \left]\frac{3}{2}, 5\right[$

16. El conjunto solución de la inecuación $\frac{3x+5}{-x^2-x-1} \leq 0$ es

- (A) $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$
 (B) $\left]-\infty, \frac{5}{3}\right]$
 (C) $\left]-\infty, \frac{-5}{3}\right]$
 (D) $\left[\frac{-5}{3}, +\infty\right[$

17. Analice las siguientes relaciones:

$$f :]-\infty, -3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{-x-3}$$

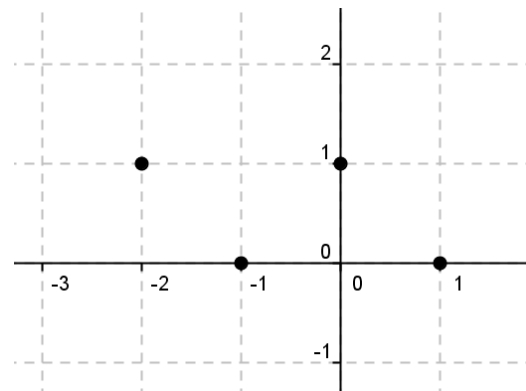
$$g : \{-3, -2, -1, 0\} \rightarrow]0, +\infty[, g(x) = -x^2$$

¿Cuáles de las relaciones anteriores son funciones?

- (A) Sólo f
 (B) Sólo g
 (C) Ambas
 (D) Ninguna

18. La siguiente figura representa la gráfica de una función f . De acuerdo con los datos de dicha gráfica es verdadero que

- (A) $f(0) \cdot f(-1) < 0$
 (B) $f(-2) \cdot f(0) = 0$
 (C) $f(1) \cdot f(-2) = 0$
 (D) $f(1) \cdot f(-1) > 0$



19. Considere la función $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$ y analice las siguientes proposiciones:

I. La preimagen de -1 es negativa.

II. La imagen de 0 es positiva.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- (A) Sólo la I.
- (B) Sólo la II.
- (C) Ninguna.
- (D) Ambas.

20. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$. ¿Cuál de los siguientes pares ordenados pertenece al gráfico de f ?

- (A) $(-2, 1)$
- (B) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
- (C) $\left(-2, \frac{3}{4}\right)$
- (D) $\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$

21. Considere la función $f(x) = (x-2)^2$, $f :]-\infty, 2] \rightarrow [0, +\infty[$ entonces $f^{-1}(9)$ es igual a

- (A) 49
- (B) -1
- (C) 3
- (D) 5

22. Para la función f dada por $f(x) = 2 - x^2$, la imagen de $(a-1)$ es

- (A) $3 - a$
- (B) $1 - a^2$
- (C) $1 + 2a - a^2$
- (D) $3 + 2a - a^2$

23. Para una función biyectiva f cuyo gráfico es $G_f = \{(3,4), (-5,8), (2,7), (5,3)\}$, considere las siguientes afirmaciones:

- I. $f^{-1}(3) = 4$
- II. $f^{-1}(8) + f(2) = 2$
- III. $(f^{-1} \circ f)(3) = 3$

De ellas, son verdaderas:

- (A) I, II y III
- (B) Solamente I y II
- (C) Solamente I y III
- (D) Solamente II y III

24. El dominio máximo de una función f con criterio $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x+2}}$ es

- (A) $]0, +\infty[$
- (B) $[0, +\infty[$
- (C) $[1, +\infty[- \{4\}$
- (D) $[0, +\infty[- \{4\}$

25. Sea $f : \{2, 4, 6\} \rightarrow \{3, 5\}$, ¿cual relación definida como conjunto de pares ordenados, corresponde a una función?

- (A) $\{(2,5), (4,3)\}$
- (B) $\{(2,3), (4,5), (6,4)\}$
- (C) $\{(2,3), (4,3), (6,3)\}$
- (D) $\{(2,3), (2,5), (4,3), (6,5)\}$

26. Para la función $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1-4x}$ la imagen de $\frac{1}{2}$ es igual a

- (A) -1
- (B) 1
- (C) $\frac{1}{8}$
- (D) $\frac{-1}{8}$

27. Si h es una función tal que $h(x) = -2x^2 + 3x + 2m$ y $h(-1) = 2$, entonces, la gráfica de h interseca al eje Y en el punto

- (A) $(0,7)$
- (B) $(0,2)$
- (C) $\left(0, \frac{7}{2}\right)$
- (D) $\left(0, \frac{-7}{2}\right)$

28. Analice las siguientes funciones:

I. $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$

II. $j :]-1, 0[\rightarrow \mathbb{R}, j(x) = x^2$

¿Cuáles de las funciones anteriores son **inyectivas**?

- (A) Sólo la I.
- (B) Sólo la II.
- (C) Ninguna.
- (D) Ambas.

29. Si f y g son funciones definidas en su dominio máximo tales que $f(x) = x^2 - 7x + 10$ y $g(x) = \sqrt{-x}$, entonces el dominio de $(g \circ f)(x)$ es igual a

- (A) \mathbb{R}
- (B) $[2, 5]$
- (C) $]-\infty, 0]$
- (D) $]-\infty, 2] \cup [5, +\infty[$

30. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x} + 2$, entonces $(f \circ g)(x)$ es igual a

- (A) $x + 2$
- (B) $\sqrt{x} + 2$
- (C) $x + 2\sqrt{x} + 4$
- (D) $x + 4\sqrt{x} + 4$

Fin de la primera parte



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

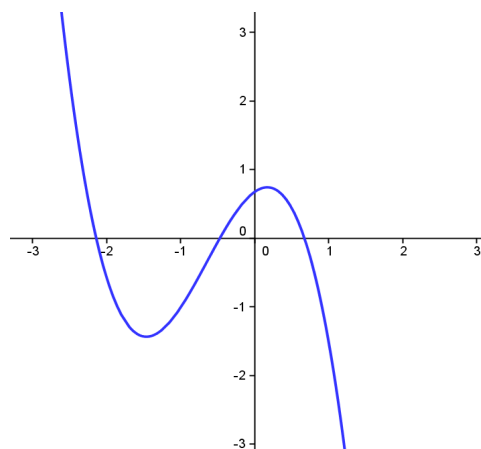


PRIMER EXAMEN PARCIAL 2012 - Sábado 28 de abril

Nombre completo: _____ CÓDIGO: _____

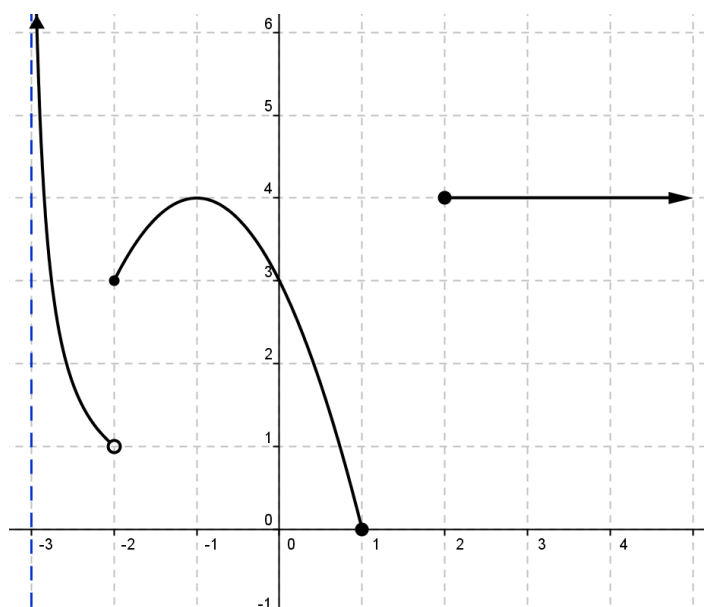
COLEGIO: _____

PREGUNTA	Puntos obtenidos
Análisis de gráfica	
Desarrollo 1	
Desarrollo 2	
Desarrollo 3	



SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA (Valor 7 puntos)

A continuación se le presenta la gráfica de una función f , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



- a) El dominio de f : _____
- b) El ámbito de f : _____
- c) El conjunto solución de la inecuación $f(x) \leq 0$: _____
- d) El conjunto solución de la ecuación $f(x) = 3$ tiene la siguiente cantidad de elementos _____
- e) Un intervalo donde f es decreciente: _____
- f) La cantidad de preimágenes de 3,25: _____
- g) El valor de $f(2012)$: _____

TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 18 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{1}{x^2 + 6x + 9} - \frac{x - 2}{x^2 + 5x + 6} \leq \frac{-1}{x + 2}$$

2. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{3x+16} = 1 + \sqrt{2x+9}$$

3. (6 puntos) Utilice ecuaciones para resolver el siguiente problema:

Una empresa desea construir un edificio rectangular cuya base tenga un perímetro de 300 m y un área de 5400 m^2 . ¿Qué dimensiones debe tener la base del edificio?

Fin del examen



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

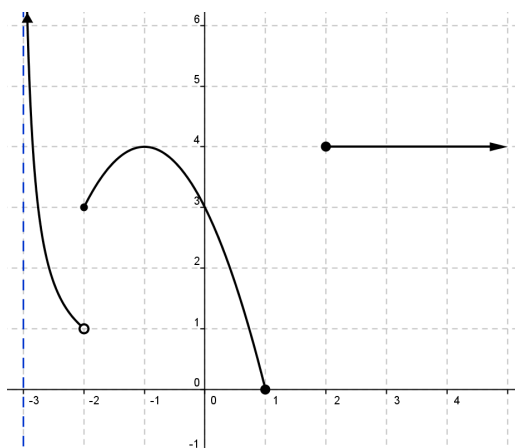


SOLUCIONARIO

PRIMER EXAMEN PARCIAL 2012 - Sábado 28 de abril

SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA (Valor 7 puntos)

A continuación se le presenta la gráfica de una función f , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



- El dominio de f : $]-3,1] \cup [2,+\infty[$
- El ámbito de f : $[0,+\infty[$
- El conjunto solución de la inecuación $f(x) \leq 0$: $\{1\}$
- El conjunto solución de la ecuación $f(x) = 3$ tiene la siguiente cantidad de elementos 3
- Un intervalo donde f es decreciente: $]-3,-2[$
- La cantidad de preimágenes de 3,25: 3
- El valor de $f(2012)$: 4

Desarrollo

1. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{1}{x^2 + 6x + 9} - \frac{x-2}{x^2 + 5x + 6} \leq \frac{-1}{x+2}$$

Solución:

$$\frac{1}{x^2 + 6x + 9} - \frac{x-2}{x^2 + 5x + 6} \leq \frac{-1}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{x-2}{(x+3)(x+2)} + \frac{1}{x+2} \leq 0 \quad \text{Restricciones: } x \neq -3 \text{ y } x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2) - (x-2)(x+3) + (x+3)^2}{(x+3)^2(x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2 - (x^2 + x - 6) + x^2 + 6x + 9}{(x+3)^2(x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2 - x^2 - x + 6 + x^2 + 6x + 9}{(x+3)^2(x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x+17}{(x+3)^2(x+2)} \leq 0$$

Con lo anterior se puede construir la tabla de signos:

	$-\infty$	-3	$\frac{-17}{6}$	-2	$+\infty$
$6x+17$		-	-	+	+
$(x+3)^2$		+	+	+	+
$x+2$		-	-	-	+
$\frac{6x+17}{(x+3)^2(x+2)}$		+	+	-	+

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \left[\frac{-17}{6}, -2 \right[$

2. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{3x+16} = 1 + \sqrt{2x+9}$$

Solución:

Se determina el conjunto de valores para los cuales está definida la expresión:

Como $2x+9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-9}{2}$ y $3x+16 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-16}{3}$, dicho conjunto es

$$D = \left[\frac{-9}{2}, +\infty \right]. \text{ Ahora:}$$

$$\sqrt{3x+16} = 1 + \sqrt{2x+9}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3x+16})^2 = (1 + \sqrt{2x+9})^2$$

$$\Rightarrow 3x+16 = 1 + 2\sqrt{2x+9} + 2x+9$$

$$\Rightarrow x+6 = 2\sqrt{2x+9}$$

$$\Rightarrow (x+6)^2 = 4(2x+9)$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x + 36 = 8x + 36$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ o } x = -4$$

Prueba:

▪ Para $x = 0$:

$$\sqrt{3 \cdot 0 + 16} = 1 + \sqrt{2 \cdot 0 + 9}$$

$$\sqrt{16} = 1 + \sqrt{9}$$

$$4 = 4$$

$x = 0$ si es una solución.

▪ Para $x = -4$:

$$\sqrt{3 \cdot (-4) + 16} = 1 + \sqrt{2 \cdot (-4) + 9}$$

$$\sqrt{4} = 1 + \sqrt{1}$$

$$2 = 2$$

$x = -4$ si es una solución.

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{-4, 0\}$

3. (6 puntos) Utilice ecuaciones para resolver el siguiente problema:

Una empresa desea construir un edificio rectangular cuya base tenga un perímetro de 300 m y un área de 5400 m^2 . ¿Qué dimensiones debe tener la base del edificio?

Solución:

Sean

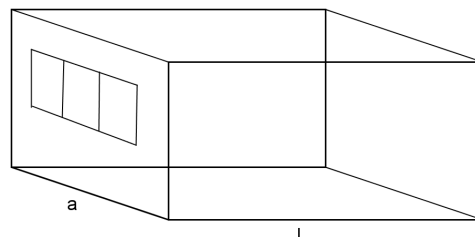
l : largo de la base del edificio.

a : ancho de la base del edificio

p : perímetro de la base del edificio

A : área de la base del edificio

Se sabe que $p = 2l + 2a$ y $A = al$; además que $p = 300 \text{ m}$ y $A = 5400 \text{ m}^2$.



Entonces:

$$300 = 2a + 2l$$

$$\text{Como } 5400 = a \cdot l$$

$$\Rightarrow 150 = a + l$$

$$\Rightarrow 5400 = (150 - l)l \text{ sustituyendo (*)}$$

$$\Rightarrow a = 150 - l \text{ (*)}$$

$$\Rightarrow 5400 = 150l - l^2$$

$$\Rightarrow l^2 - 150l + 5400 = 0$$

$$\Rightarrow (l - 90)(l - 60) = 0$$

$$\text{Entonces } l = 90 \text{ o } l = 60$$

Como $\Rightarrow a = 150 - l$, sustituyendo los valores de l obtenidos anteriormente, se tiene que $a = 60$ o $a = 90$

Por lo tanto, las dimensiones de la base del edificio son 60×90 metros.

Selección única

1	B		8	C		15	A		22	C		29	B	
2	B		9	C		16	D		23	D		30	D	
3	D		10	A		17	A		24	B				
4	A		11	B		18	C		25	C				
5	C		12	C		19	A		26	A				
6	C		13	C		20	D		27	A				
7	D		14	D		21	B		28	D				

