



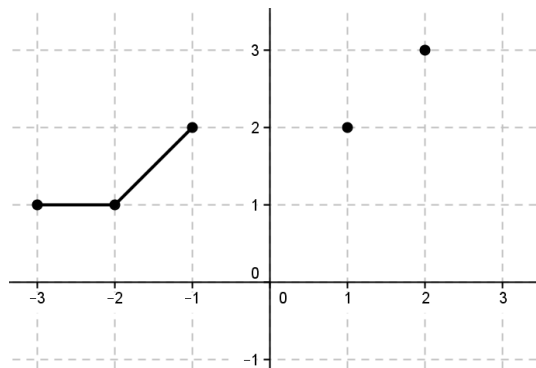
MATEM - Precálculo

Undécimo Año

I EXAMEN PARCIAL

Nombre: _____ código: _____

Colegio: _____



Fórmula

1

Sábado 27 de abril de 2013

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección única (30 puntos), la segunda es de análisis de gráfica (7 puntos) y la tercera es de desarrollo (18 puntos).
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará.**
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 30 puntos)**Álgebra**

1. La suma de las soluciones de la ecuación $x^4 - 7x^2 = -12$ es igual a

- (A) 0
- (B) $2 + \sqrt{3}$
- (C) $4 + 2\sqrt{3}$
- (D) $-4 - 2\sqrt{3}$

2. Una de las soluciones de la ecuación $(x-1)^2 - 2x(1-x) = 3$ es aproximadamente

- (A) 4,02
- (B) 1,33
- (C) 0,38
- (D) 1,72

3. Una solución de la ecuación $\frac{x^2 - 3}{x + 2} - 3 = 2x + 1$ es

- (A) $-\sqrt{5} - 2$
- (B) $\sqrt{5} - 4$
- (C) $\sqrt{5} + 4$
- (D) $-\sqrt{5} + 2$

4. La ecuación $\frac{3}{x+1} - \frac{x}{x-2} = 3$ tiene la siguiente cantidad de soluciones

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

5. El conjunto solución de la ecuación $|3x + 2| + 7 = 0$ tiene

- (A) cero elementos.
- (B) infinitos elementos.
- (C) dos elementos positivos.
- (D) un elemento positivo y uno negativo.

6. Si k es una constante positiva, una solución de la ecuación $|x - k| = 3$ es

- (A) $3 - k$
- (B) $-3 + k$
- (C) $-3 - k$
- (D) $3k$

7. La solución de la ecuación $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 2$ es un número

- (A) negativo.
- (B) mayor que cinco.
- (C) entre cero y uno.
- (D) entre dos y cinco.

8. La ecuación $\sqrt{x-5} + 2 = x$ tiene la siguiente cantidad de soluciones

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

9. Considere las siguientes ecuaciones:

$$\text{I. } \sqrt{x-2} = -\sqrt{x-3}$$

$$\text{II. } \sqrt{(x-2)^2} = 3$$

¿En cuál (es) de ellas, se cumple que el conjunto solución tiene un solo elemento?

- (A) Sólo la I
- (B) Sólo la II
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

10. El conjunto solución de $\frac{x-5}{x-3} > 1$ corresponde a

- (A) \mathbb{R}
- (B) \emptyset
- (C) $]3, +\infty[$
- (D) $] -\infty, 3[$

11. Si $0 < b < 1$, el conjunto solución de $\frac{x-b}{(-x+2)(x+3)} \leq 0$ es

- (A) $] -3, b[\cup] 2, +\infty[$
- (B) $] -3, b] \cup] 2, +\infty[$
- (C) $] -\infty, -3[\cup] b, 2[$
- (D) $] -2, b] \cup] 3, +\infty[$

12. **Todas** las soluciones de $|x - 2| \leq 3$ son

- (A) menores que 7
- (B) menores que 5
- (C) mayores que -1
- (D) mayores que 0

13. El conjunto solución de la inecuación $5 < |2x - 7|$ corresponde a

- (A) $]-\infty, 1[\cup]6, +\infty[$
- (B) $]-\infty, -6[\cup]-1, +\infty[$
- (C) $]1, 6[$
- (D) $]-6, -1[$

14. El conjunto solución de la inecuación $x(-2x + 5)^2(1 - x) \leq 0$ corresponde a

- (A) $[0, 1]$
- (B) $\left[0, \frac{5}{2}\right[$
- (C) $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$
- (D) $]-\infty, 0] \cup \left[1, \frac{5}{2}\left[\cup \frac{5}{2}, +\infty\right[$

15. El conjunto solución de la inecuación $x(x+2) \leq x(x+3)$ corresponde a

- (A) \mathbb{R}
- (B) \emptyset
- (C) $]-\infty, 0]$
- (D) $[0, +\infty[$

Funciones

16. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$ es una función, el conjunto A puede ser

- (A) $[-5, +\infty[$
- (B) $\mathbb{R} - \{-5\}$
- (C) $]0, 1[$
- (D) $]-\infty, -5[$

17. Analice las siguientes relaciones:

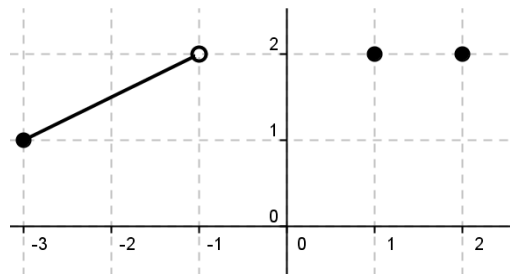
$$f : \{1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$g :]-\infty, 3[\rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$$

¿Cuáles de las relaciones anteriores son funciones?

- (A) Sólo f
- (B) Sólo g
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

Considere la siguiente gráfica de una función f y con base en ella, conteste los ítems 18, 19 y 20.



18. El dominio de f corresponde a

- (A) $[-3, -1[\cup \{1, 2\}$
- (B) $[-3, -1] \cup \{1, 2\}$
- (C) $[-3, -1[\cup [1, 2]$
- (D) $[-3, 2]$

19. El ámbito de f corresponde a

- (A) $[-3, 2]$
- (B) $[1, 2]$
- (C) $[1, 2[$
- (D) $\{1, 2\}$

20. La cantidad de preimágenes de 2 es igual a

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

21. Considere la función $f :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y analice las siguientes proposiciones:

I. La preimagen de 4 es 2.

II. La imagen de -3 es 9.

¿Cuál (es) de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- (A) Sólo la I
- (B) Sólo la II
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

22. Si el criterio de una función f es $f(x) = \frac{\sqrt{-x+2}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ ¿Cuál es su dominio máximo?

- (A) $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 2[$
- (B) $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 2]$
- (C) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- (D) $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

23. Para la función f dada por $f(x) = x^2 + 2x$, se tiene que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es igual a

- (A) $h + 2$
- (B) $2a + h + 2$
- (C) $\frac{h^2 + 2x + 2a}{h}$
- (D) $2ah + h + 2h$

24. ¿Cuál de las siguientes funciones es biyectiva ?

(A) $f :]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-2)^2 + 3$

(B) $f :]2, +\infty[\rightarrow]3, +\infty[, f(x) = (x-2)^2 + 3$

(C) $\mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, f(x) = |x-2|$

(D) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

25. Considere la función biyectiva $f :]-\infty, 0[\rightarrow]3, +\infty[, f(x) = x^2 + 3$, $f^{-1}(8)$ es igual a

(A) $\sqrt{5}$

(B) 67

(C) -67

(D) $-\sqrt{5}$

26. Considere la función biyectiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{3} - 8$. Entonces, $f^{-1}(x)$ es igual a

(A) $\frac{3x}{2} + 4$

(B) $3x + 4$

(C) $3x + 12$

(D) $\frac{3x}{2} + 12$

27. El área A de un cuadrado, en función de su perímetro P es igual a

(A) $A(P) = \frac{P^2}{4}$

(B) $A(P) = \frac{P^2}{16}$

(C) $A(P) = 4\sqrt{A}$

(D) $A(P) = \frac{\sqrt{A}}{4}$

28. Alberto es socio de un prestigioso club, la cuota mensual de asociado es de 8000 colones. Una vez al mes realiza eventos de su agencia de publicidad. Él debe pagar 1500 colones por cada persona (cliente) que lleve al evento. La cantidad de dinero C , que le cancela al club por mes, en función de la cantidad x de clientes corresponde a

(A) $C = 6500x$

(B) $C = 9500x$

(C) $C = 1500 + 8000x$

(D) $C = 1500x + 8000$

29. Si f y g son funciones definidas en su dominio máximo, tales que $f(x) = \sqrt{x+1}$ y

$g(x) = \sqrt{1-x}$, entonces, el dominio de $\frac{f}{g}$ es igual a

(A) $] -1, 1[$

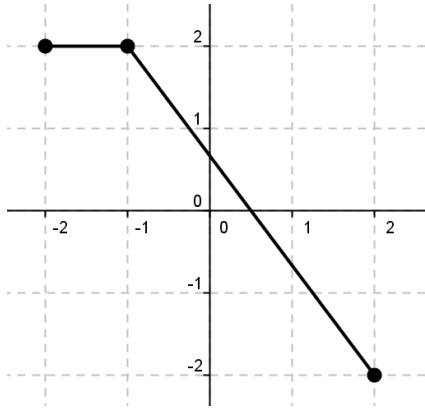
(B) $[-1, 1]$

(C) $] -1, 1]$

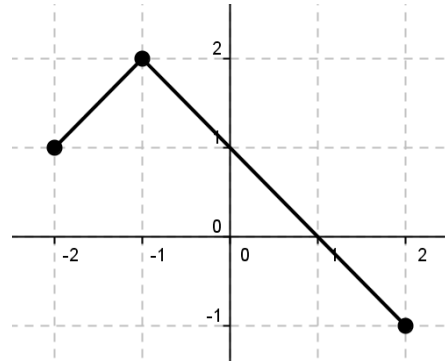
(D) $[-1, 1[$

30. Considere las siguientes funciones:

$$f: [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$$



$$g: [-2, 2] \rightarrow [-1, 2]$$



De acuerdo con las funciones anteriores, $(f \circ g)(-1)$ es igual a

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 2
- (D) 0

Fin de la primera parte



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica



PRIMER EXAMEN PARCIAL 2013 - Sábado 27 de abril

Nombre completo: _____

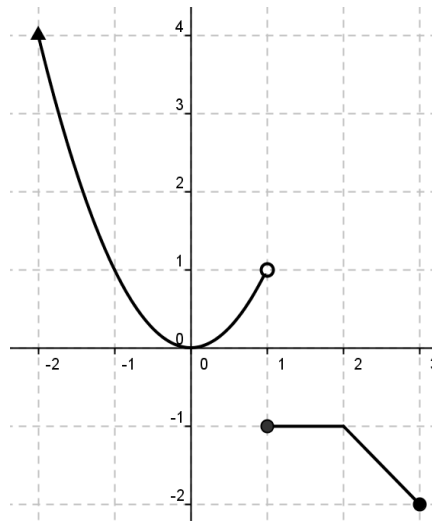
CÓDIGO: _____

COLEGIO: _____

AG	
D1	
D2	
D3	

SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA (Valor 7 puntos)

A continuación se le presenta la gráfica de una función f , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



- a) El dominio de f : _____
- b) El ámbito de f : _____
- c) El conjunto solución de la inequación $f(x) < 0$: _____
- d) El conjunto de **todas** las imágenes que tienen **exactamente dos** preimágenes es igual a: _____
- e) Un intervalo donde f es decreciente: _____
- f) La imagen de $\frac{3}{2}$ es igual a: _____
- g) El conjunto solución de la inequación $f(x) > 1$: _____

TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 18 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{2x+1}{x+3} + \frac{x}{x-2} > 2$$

2. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$x^4 - x^3 - 15x^2 = 7x - 22$$

3. (6 puntos) Utilice ecuaciones para resolver el siguiente problema:

Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 5 cm más que el doble del otro. Si la hipotenusa mide 20 cm. Determine, de manera exacta, el perímetro de ese triángulo.

Fin del examen



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica



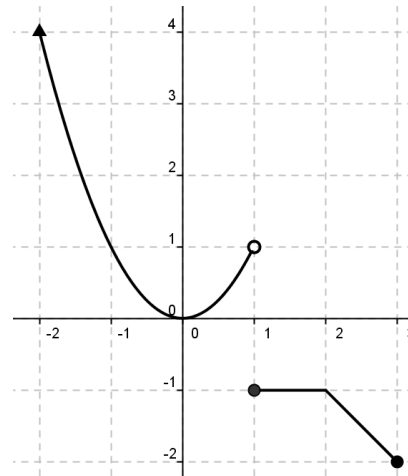
SOLUCIONARIO

PRIMER EXAMEN PARCIAL 2013 - Sábado 27 de abril

Selección única

1	A		8	A		15	D		22	B		29	D	
2	D		9	D		16	C		23	B		30	A	
3	B		10	D		17	A		24	B				
4	B		11	B		18	A		25	D				
5	A		12	A		19	B		26	D				
6	B		13	A		20	C		27	B				
7	C		14	C		21	B		28	D				

SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA (Valor 7 puntos)



- El dominio de f : $]-\infty, 3]$
- El ámbito de f : $[-2, -1] \cup [0, +\infty[$
- El conjunto solución de la inecuación $f(x) < 0$: $[1, 3]$
- El conjunto de **todas** las imágenes que tienen **exactamente dos** preimágenes es igual a: $]0, 1[$
- Un intervalo donde f es decreciente: $]2, 3[$ (la respuesta no es única)
- La imagen de $\frac{3}{2}$ es igual a: -1
- El conjunto solución de la inecuación $f(x) > 1$: $]-\infty, -1[$

Desarrollo

1. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{2x+1}{x+3} + \frac{x}{x-2} > 2$$

Solución:

Note que las restricciones son $x \neq -3$ y $x \neq 2$.

$$\frac{2x+1}{x+3} + \frac{x}{x-2} > 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-2) + x(x+3)}{(x+3)(x-2)} > \frac{2(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-2) + x(x+3)}{(x+3)(x-2)} > \frac{2(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 2 + x^2 + 3x}{(x+3)(x-2)} > \frac{2(x^2 + x - 6)}{(x+3)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 2 + x^2 + 3x - 2x^2 - 2x + 12}{(x+3)(x-2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 10}{(x+3)(x-2)} > 0$$

	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$		-	+	+
$x-2$		-	-	+
$x^2 - 2x + 10$		+	+	+
$\frac{x^2 - 2x + 10}{(x+3)(x-2)}$		+	-	+

Por lo tanto, el conjunto solución es $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$

2. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$x^4 - x^3 - 15x^2 = 7x - 22$$

Solución:

$$x^4 - x^3 - 15x^2 = 7x - 22$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^3 - 15x^2 - 7x + 22 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 11)(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 11 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} + 1 \quad \text{o} \quad x = -2\sqrt{3} + 1 \quad \text{o} \quad x = 1 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \{2\sqrt{3} + 1, -2\sqrt{3} + 1, -2, 1\}$$

Nota:

$$x^2 - 2x - 11 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{48}}{2}, \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -11 = 48$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{3} + 1 \quad \text{o} \quad x = -2\sqrt{3} + 1$$

3. (6 puntos) Utilice ecuaciones para resolver el siguiente problema:

Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 5 cm más que el doble del otro. Si la hipotenusa mide 20 cm. Determine, de manera exacta, el perímetro de ese triángulo.

Solución:

Sea x la medida de uno de los catetos, entonces la medida del otro cateto es $2x+5$. Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$x^2 + (2x+5)^2 = 20^2$$

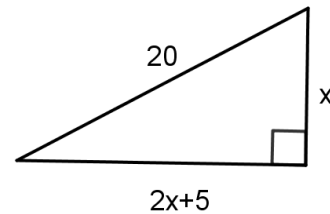
$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 + 20x + 25 = 400$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 20x - 375 = 0, \quad \Delta = 20^2 - 4 \cdot 5 \cdot -375 = 7900$$

$$\Rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{7900}}{10}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-20 \pm 10\sqrt{79}}{10}$$

$$\Rightarrow x = -2 + \sqrt{79} \quad \text{o} \quad x = -2 - \sqrt{79}$$



Como x representa la medida de un cateto debe ser un número positivo, se tiene que $x = -2 + \sqrt{79}$. Así, las medidas de los catetos son $-2 + \sqrt{79}$ y $1 + 2\sqrt{79}$. De modo que:

$$\text{Perímetro del triángulo: } P = 20 + (-2 + \sqrt{79}) + (1 + 2\sqrt{79}) = 19 + 3\sqrt{79}$$