Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
PROYECTO MATEM 2011

Sábado 30 de julio, 2011
Segundo Examen Parcial
MA0125 Undécimo año

PRIMERA PARTE. SELECCION **(Valor total 32 puntos)**

1	B	7	B	13	A	19	B	25	A	31	B
2	D	8	C	14	D	20	D	26	D	32	A
3	B	9	B	15	B	21	A	27	D		
4	D	10	B	16	B	22	A	28	C		
5	D	11	C	17	C	23	C	29	C		
6	B	12	D	18	D	24	B	30	C		

SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor total 18 puntos)**

1) Considere la inecuación $\log_{\frac{5}{6}}(2-5x) < \log_{\frac{5}{6}} 3 + \log_{\frac{5}{6}}(x+2)$

a. Determine el dominio de la inecuación. (Valor: 1 punto)

Se necesita que los argumentos de cada uno de los logaritmos de la expresión sean positivos, es decir:

- $(2-5x) > 0 \Rightarrow -5x > -2 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$
- $(x+2) > 0 \Rightarrow x > -2$

Por lo tanto, al hacer la intersección entre los dos intervalos, se obtiene como dominio de la inecuación, el intervalo $\left]-2, \frac{2}{5}\right[$.

b. Resuelva la inecuación. (Valor: 4 puntos)

$$\log_{\frac{5}{6}}(2-5x) < \log_{\frac{5}{6}} 3 + \log_{\frac{5}{6}}(x+2)$$
$$\Leftrightarrow \log_{\frac{5}{6}}(2-5x) < \log_{\frac{5}{6}}(3x+6)$$

Dado que la base es menor que 1 y que por ende, la función es decreciente, entonces la expresión es equivalente a:

$$(2-5x) > (3x+6) \Leftrightarrow -8x > 4 \Leftrightarrow x < \frac{-1}{2}$$

c. Indique el conjunto solución. (Valor: 1 punto)

Considerando los valores de x tales que $x < \frac{-1}{2}$ y que se encuentran dentro del dominio de la expresión, se obtiene como conjunto solución:

$$S = \left]-2, -\frac{1}{2}\right[$$

2) Considere el triángulo ΔABC cuyos vértices son los puntos $A(1,2)$, $B(3,1)$ y $C(5,5)$.

a. Determine la ecuación de la recta que define la altura sobre $\overline{AC}$. (Valor 3 puntos)

Pendiente de la recta que pasa por A y C: $m = \frac{5-2}{5-1} = \frac{3}{4}$

Así, la intersección de esta recta con el eje Y, utilizando el punto A, es: $b = 2 - \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}$

- Ecuación de la recta que pasa por A y C: $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

Dado que se busca la ecuación de la recta que pasa por B y que es perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$, entonces se sabe que la pendiente de la recta que define la altura sobre $\overline{AC}$ es $m = -\frac{4}{3}$ y que su intersección con el eje Y estaría dada por $b = 1 - \frac{-4}{3} \cdot 3 = 5$.

- Por lo tanto, la ecuación de la recta que define la altura sobre $\overline{AC}$ es: $y = \frac{-4}{3}x + 5$

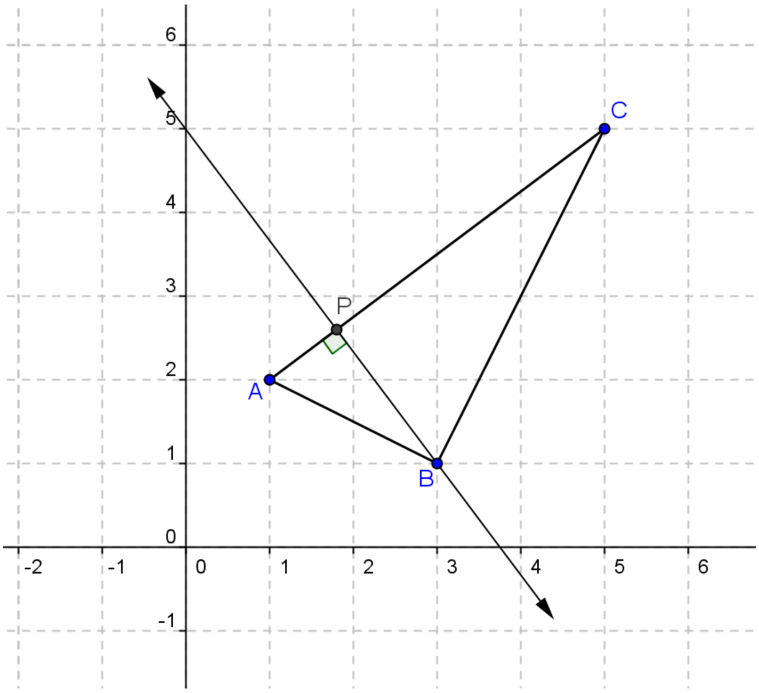
b. Calcule el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ con la altura sobre $\overline{AC}$. (Valor 2 puntos)

Al igualar las ecuaciones de las dos rectas, $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = \frac{-4}{3}x + 5$

Se obtiene: $x = \frac{9}{5}$. Sustituyendo en una de ellas, se obtiene: $y = \frac{13}{5}$

Por lo tanto, el punto de intersección es: $P\left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$

c. Haga una representación gráfica. (Valor 2 puntos)



3) Una pelota es lanzada hacia arriba, con una velocidad de 64 m/seg, desde la azotea de un edificio de 80 metros de altura. La pelota estará a una altura de $f(t) = -16t^2 + 64t + 80$ metros sobre el nivel del suelo a t segundos después del lanzamiento:

a. Calcule la altura máxima que puede alcanzar la pelota. (2 puntos)

La altura máxima está dada por el valor que toma la función en su vértice, puesto que se observa que se trata de una función cuadrática cóncava hacia abajo.

De esta manera, dado que el eje de simetría es $x = \frac{-b}{2a} = 2$, la altura máxima se alcanza para ese valor; es decir: $f(2) = -16 \cdot 2^2 + 64 \cdot 2 + 80 = 144$

Por lo tanto, la altura máxima que alcanza la pelota es de 144 metros.

b. Suponiendo que la pelota no toca el edificio, calcule el tiempo en que tocará el suelo. (3 puntos)

La pelota toca el suelo para los valores de t en que su altura es 0; es decir, se busca un valor de $t > 0$, donde $f(t) = 0$:

$$f(t) = -16t^2 + 64t + 80 = 0$$
$$\Rightarrow (t-5)(t+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad t = 5 \quad \text{o bien} \quad t = -1$$

Por lo tanto, la pelota toca el suelo en 5 segundos, luego de haber sido lanzada del edificio.