



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



## MATEM 2016 - Undécimo

### SOLUCIONARIO

#### TERCER EXAMEN PARCIAL 2016

#### SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 21 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (5 puntos) Determine el conjunto solución de la ecuación

$$2 \cdot \log_3(x+1) - \log_3(x^2 - 1) = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

Solución:

$$2 \cdot \log_3(x+1) - \log_3(x^2 - 1) = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \log_3(x+1)^2 - \log_3[(x-1)(x+1)] = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \log_3\left[\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}\right] = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \log_3(x+1) = \log_3(x^2 - 5x + 6)$$

$$\Rightarrow x+1 = x^2 - 5x + 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ o } x=5$$

**Prueba:**

- Para  $x=1$

No es solución dado que hace cero uno de los argumentos de los logaritmos y además es una restricción.

- Para  $x=5$

$$2 \cdot \log_3(5+1) - \log_3(5^2 - 1) = \log_3\left(\frac{5^2 - 5 \cdot 5 + 6}{5-1}\right)$$

$$2 \cdot \log_3(6) - \log_3(24) = \log_3\left(\frac{6}{4}\right)$$

$$\log_3\left(\frac{36}{24}\right) = \log_3\left(\frac{6}{4}\right)$$

$$\log_3\left(\frac{3}{2}\right) = \log_3\left(\frac{3}{2}\right)$$

Sí es solución

$$\text{Entonces } S = \{5\}$$

2. (5 puntos) Utilice la información sobre “inversión de dinero” para resolver el problema que se le presenta.

**Inversión de dinero (interés compuesto anualmente)**

Si una cantidad de dinero  $P$  se invierte a una tasa de interés  $r$  durante un periodo  $t$  de años, entonces el monto  $A$  de la inversión está dado por  $A = P \cdot (1 + r)^t$

Daniel invierte 5000 dólares a una tasa de interés del 2%.

- c. ¿En cuánto dinero se incrementa lo invertido después de transcurrido un año?  
d. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la cantidad invertida se duplique?

Solución:

- a. En un periodo de un año,  $t = 1$ .

$$P = 5000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^1$$

$$\Rightarrow A = 5000 \cdot \frac{51}{50}$$

$$\Rightarrow A = 5100$$

El monto de la inversión se incrementa en 100 dólares.

- b. Para que la inversión se duplique se debe cumplir que  $A = 10000$ .

$$10000 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t$$

$$\Rightarrow 2 = \left(\frac{51}{50}\right)^t$$

$$\Rightarrow \log_{\left(\frac{51}{50}\right)} 2 = t$$

$$\Rightarrow t \approx 35,0027$$

(se aproxima con la calculadora, para efectos del examen se puede dejar en términos de logaritmos)

Deben transcurrir, aproximadamente 35 años.

3. (6 puntos) Determine, en  $\mathbb{R}$ , el conjunto solución de la siguiente ecuación

$$\cos x \cdot (\tan x + 1)(2\operatorname{sen}x + \sqrt{3}) = 0$$

Solución:

Como  $\cos x = 0$  indefinición de la tangente, las restricciones son:  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$$\cos x \cdot (\tan x + 1)(2\operatorname{sen}x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \tan x + 1 = 0, \quad 2\operatorname{sen}x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = -1, \quad \operatorname{sen}x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ x / x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4. (5 puntos) La altura de un cono mide 8 cm y la circunferencia de la base mide es  $12\pi$  cm. Determine el área total y el volumen de dicho cono.

Solución:

- Circunferencia de la base:  $c = 12\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 6$

- Generatriz del cono:  $g^2 = r^2 + h^2$

$$g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g = 10$$

- Área total del cono:  $A = A_B + A_L$

$$A = \pi r^2 + \pi r g$$

$$A = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 = 96\pi$$

- Volumen:  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$$V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 96\pi$$

Respuestas:

Área total:  $A = 96\pi \text{ cm}^2$

Volumen:  $V = 96\pi \text{ cm}^3$

SELECCIÓN ÚNICA

1	A		8	A		15	C		22	A		29	A	
2	B		9	B		16	D		23	B		30	B	
3	B		10	A		17	C		24	B		31	B	
4	B		11	D		18	B		25	D		32	C	
5	D		12	D		19	B		26	B		33	A	
6	D		13	B		20	A		27	B		34	A	
7	D		14	A		21	D		28	B				