Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

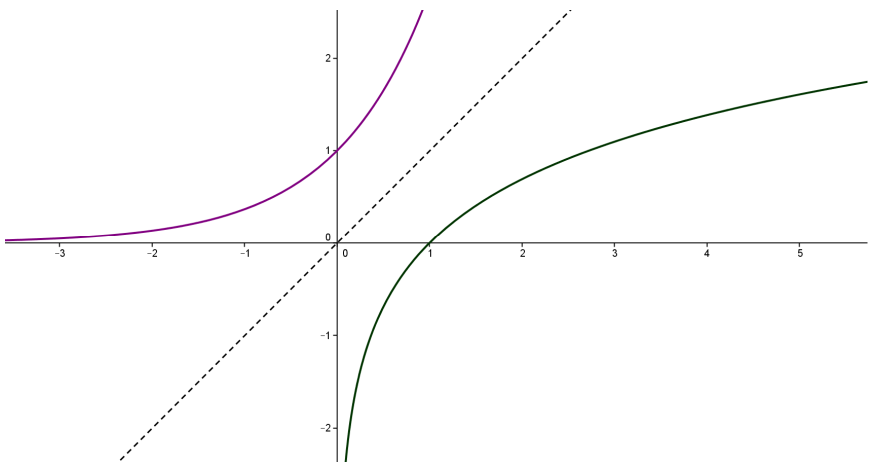
# MATEM - Precálculo

## Undécimo Año

## II EXAMEN PARCIAL

Nombre: ________________________________ código: _______

Colegio: ____________________________________________




**Fórmula**

**1**

Sábado 27 de julio de 2013

# INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (30 puntos), la segunda es de desarrollo (20 puntos).

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

## PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 30 puntos)**

1. La ecuación de la recta que contiene al punto $(2,-1)$ y es paralela al eje de las abscisas es

(A) $x=2$

(B) $y=2$

(C) $x=-1$

(D) $y=-1$

2. La distancia entre los puntos donde la recta de ecuación $2x-3y=6$ interseca a los ejes coordenados es

(A) 5 u.l.

(B) $\sqrt{5}$ u.l.

(C) 13 u.l.

(D) $\sqrt{13}$ u.l.

3. Considere el segmento $\overline{AB}$ cuyo punto medio es el de coordenadas $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. Si las coordenadas de A son $(-3,4)$ entonces el par ordenado correspondiente a B es

(A) $(1,-2)$

(B) $(-2,1)$

(C) $(-1,2)$

(D) $(2,-1)$

4. Considere una recta de pendiente -4. Si el punto $(a,b)$ pertenece a esa recta, entonces, también pertenece a ella el punto

(A) $(a+1,b-4)$

(B) $(a+1,b+4)$

(C) $(a+1,4b)$

(D) $(a+1,-4b)$

5. La recta de ecuación $y+3x=-2$ **no** contiene puntos del siguiente cuadrante

(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

6. Analice las siguientes afirmaciones sobre la parábola de ecuación $y-4=x^2$

I. No interseca al eje X
II. Es cóncava hacia abajo

De ellas, son verdaderas

(A) Solamente II

(B) Solamente I

(C) Ninguna

(D) Ambas

7. Si la parábola de ecuación $y=2x^2+4mx-m+1$ contiene al punto $(-2,18)$ entonces interseca al eje Y en el punto

(A) $(0,-1)$

(B) $(0,1)$

(C) $(0,0)$

(D) $(0,2)$

8. Considere la parábola cuyo vértice es el punto $(3,5)$ y además contiene al punto $(5,9)$. Analice las siguientes afirmaciones sobre esta curva:

I. contiene al punto $(1,9)$

II. es creciente en $]-\infty,3[$

De ellas, son verdaderas

(A) Solamente II

(B) Solamente I

(C) Ninguna

(D) Ambas

9. El ámbito de la función $f:]-2,4]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=5-\dfrac{x}{2}$ es

(A) $]3,6]$

(B) $[3,6[$

(C) $[2,14[$

(D) $]2,14]$

10. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$ . Si la recta que contiene a los puntos $(-1,f(-1))$ y $(7,f(7))$ es paralela al eje X entonces el valor de $-\dfrac{b}{2a}$ es

(A) 4

(B) 3

(C) $\dfrac{f(7)+f(1)}{2}$

(D) $\dfrac{f(7)-f(1)}{2}$

11. Considere la función lineal $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(-3)=5$ y $f(-5)=3$. La preimagen de 8 es

(A) 16
(B) 8
(C) 0
(D) -8

12. El ámbito de la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=-3(x-1)^2-2$ es

(A) $]-\infty,1]$
(B) $]-\infty,-2]$
(C) $]-\infty,2]$
(D) $[-2,+\infty[$

13. El ámbito de la función $h:]-3,4[\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=x^2-2x$ es

(A) $]3,8[$
(B) $]8,15[$
(C) $[-1,8[$
(D) $[-1,15[$

14. El menor producto que se puede obtener entre dos números reales cuya diferencia es 1,5 es

(A) 0,75
(B) -0,75
(C) 0,5625
(D) -0,5625

15. El número de millas $M$ que cierto automóvil puede recorrer con un galón de gasolina a una velocidad $v$ (en millas por hora) está dada por $M = \dfrac{75v - v^2}{30}$ con $v \in \left]0,70\right[$. La velocidad más económica para el viaje es

(A) $46,875\,\dfrac{mi}{h}$

(B) $37,5\,\dfrac{mi}{h}$

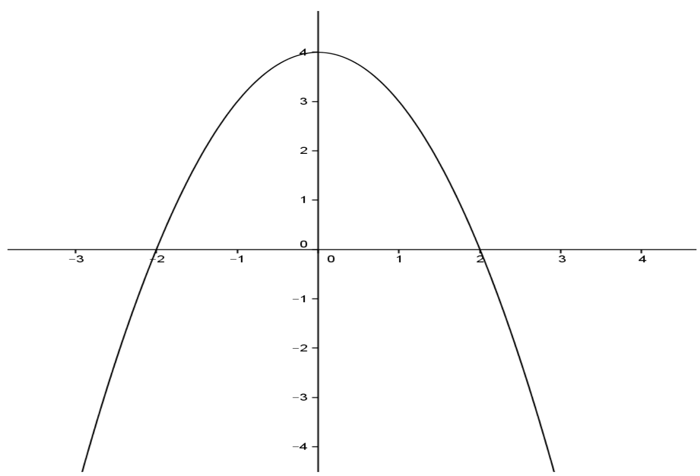
(C) $23,5\,\dfrac{mi}{h}$

(D) $18,75\,\dfrac{mi}{h}$

16. Considere la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Analice las siguientes afirmaciones:

I. $b = 0$

II. $ac < 0$




De ellas, son verdaderas

(A) Solamente II
(B) Solamente I
(C) Ninguna
(D) Ambas

17. El dominio máximo de la función definida por $g(x) = \dfrac{2}{3} - \log\left(\dfrac{5-x}{2}\right)$ es

(A) $\left]0,+\infty\right[$

(B) $\left]5,+\infty\right[$

(C) $\left]-\infty,5\right[$

(D) $\left]-\infty,7\right[$

18. La gráfica de la función definida en su dominio máximo por $r(x)=2+\ln(3-x)$ es asintótica a la recta de ecuación

(A) $x=3$

(B) $x=2$

(C) $y=2$

(D) $y=3$

19. El ámbito de la función $j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $j(x)=-1-5^{x+2}$ es

(A) $\mathbb{R}$

(B) $]-1,+\infty[$

(C) $]-\infty,-1[$

(D) $]-\infty,-2[$

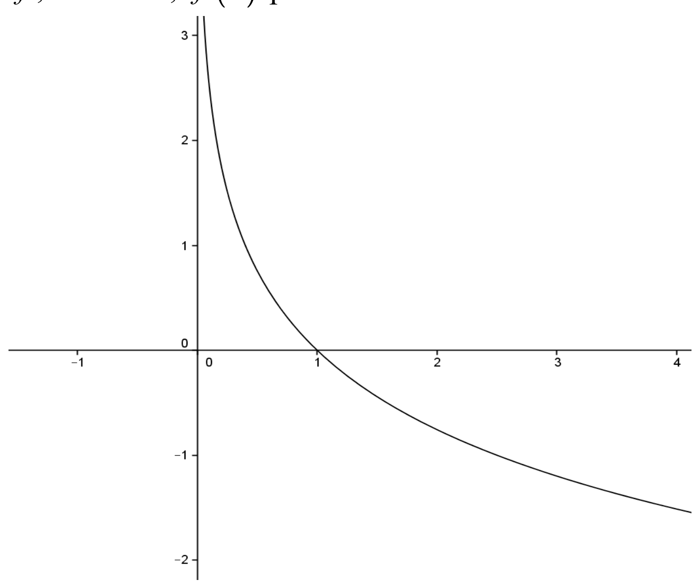
20. Considere la gráfica de la función $f$, Entonces, $f(x)$ podría ser

(A) $f(x)=a^x$ con $a>1$

(B) $f(x)=a^x$ con $0<a<1$

(C) $f(x)=\log_a x$ con $a>1$

(D) $f(x)=\log_a x$ con $0<a<1$




21. Si $\ln a$ es un número negativo entonces la función $f(x)=\log_a x$ definida en su dominio máximo es

(A) creciente y cóncava hacia arriba

(B) creciente y cóncava hacia abajo

(C) decreciente y cóncava hacia arriba

(D) decreciente y cóncava hacia abajo

22. Si la función $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $h(x)=b^x-4$, con $b>0$, interseca al eje X en el punto $(-2,0)$ entonces $h(-1)$ es igual a

(A) -6

(B) -4

(C) -2

(D) 2

23. Si *t* es una función biyectiva tal que $t(x)=5^{3-2x}-1$ entonces $t^{-1}(x)=$

(A) $\dfrac{3-\log_5(x+1)}{2}$

(B) $3-\dfrac{\log_5(x+1)}{2}$

(C) $\dfrac{-\log_5(x-2)}{2}$

(D) $\dfrac{3-\log\ (x+1)}{2}$

24. El conjunto solución de la ecuación $\log_5(3x-4)=1$ es

(A) $\left]\dfrac{4}{3},+\infty\right[$

(B) $\{3\}$

(C) $\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

(D) $\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

25. El conjunto solución de $(0,5)^{x+1}>(0,5)^{2x-3}$ es

(A) $\mathbb{R}$

(B) $]4,+\infty[$

(C) $]-\infty,4[$

(D) $]-\infty,-4[$

26. El conjunto solución de $-25^{x^2+\frac{1}{2}} - 0,2 = 0$ es

(A) $\{1,-1\}$

(B) $\{1\}$

(C) $\{0\}$

(D) $\varnothing$

27. El conjunto solución de $2^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$ es

(A) $\left\{\frac{-\ln 3}{\ln 2 - 1}\right\}$

(B) $\left\{\frac{-\ln 3}{\ln 2 - \ln 3}\right\}$

(C) $\left\{\frac{1}{\ln 2}\right\}$

(D) $\varnothing$

28. El conjunto solución de $\log_3(5-x) > \log_3(x+2)$ es

(A) $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

(B) $\left]\frac{3}{2}, 5\right[$

(C) $\left]-2, \frac{3}{2}\right[$

(D) $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$

29. La expresión $\ln\left(x^2-3x-4\right)-\ln(x-4)+\ln(x+1)$ es equivalente a

(A) $\ln^2(x+1)$

(B) $2\ln(x+1)$

(C) 1

(D) 0

30. La cantidad de carbono-14 presente en un organismo ***t*** años después de su muerte está dado por la ecuación $A = A_0e^{-0{,}000124t}$ donde $A_0$ es la cantidad original de carbono-14 en el organismo. Si una hoja fosilizada contiene 70% de la cantidad original de carbono-14 entonces el fósil indica que la hoja es de hace aproximadamente

(A) $\dfrac{e^{0{,}7}}{0{,}000124}$ años

(B) $\dfrac{-\ln 0{,}7}{0{,}000124}$ años

(C) $\dfrac{\ln 0{,}7}{0{,}000124}$ años

(D) $\dfrac{-\ln 70}{0{,}000124}$ años

*Fin de la primera parte*

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

**SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 2013 - Sábado 27 de julio**

| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| D3 | |
| D4 | |

Nombre completo: ________________________________

CÓDIGO: ______________________________________

COLEGIO: _____________________________________

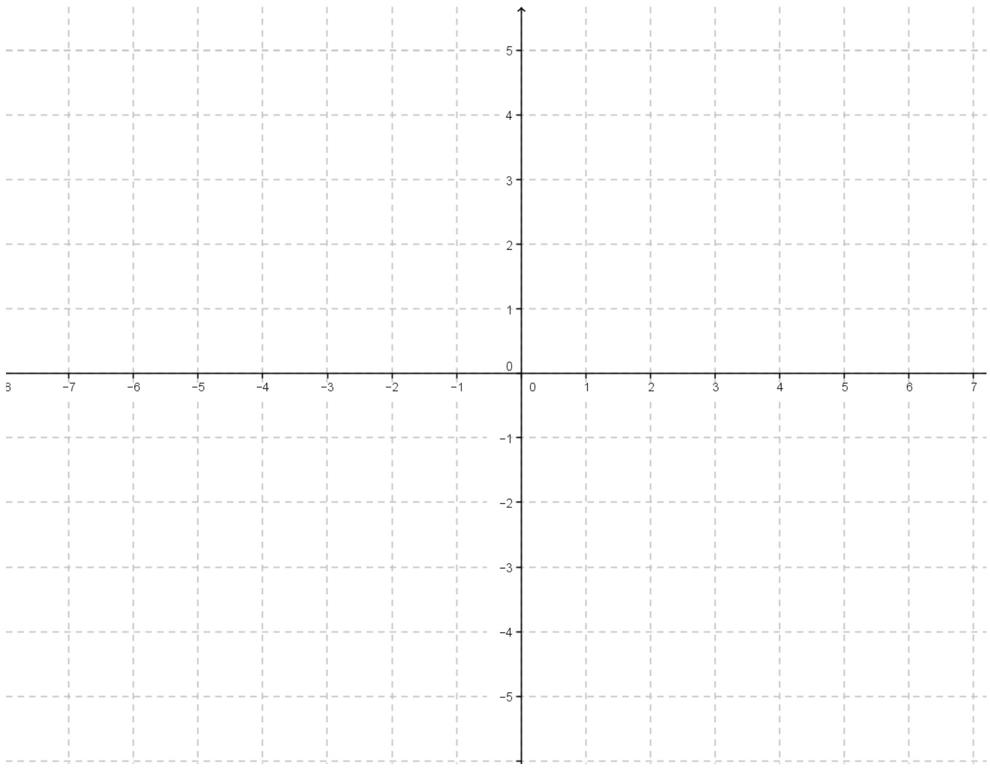
## SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor 20 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (5 puntos) Considere los puntos de coordenadas $A(-2,-3)$, $B(1,0)$, $C(-1,2)$ y $D(-4,-1)$. Verifique que $\square ABCD$ es un rectángulo y calcule su área.

2. (4 puntos) Suponga que el peso $w$, en kilogramos, y la edad $t$, en meses, de un bebé están relacionados por una función lineal hasta los 6 meses. Si el bebé al nacer pesa 4 kg, y en tres meses aumentó a 5,8 kg, determine la función $w(t) = mt + b$ que relaciona el peso y la edad. ¿Cuál es el peso esperado a los 5,5 meses?

3. (7 puntos) Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}x-2$.
Determine el vértice, las intersecciones con el eje X y trace la gráfica.



4. (4 puntos) Determine el conjunto solución de $\log_3(3x+1)-\log_3(2x+3)<0$.

*Fin del examen*

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

**SOLUCIONARIO**

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 2013 - Sábado 27 de julio

## Selección única

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | D | | 7 | D | | 13 | D | | 19 | C | | 25 | B | |
| 2 | D | | 8 | B | | 14 | D | | 20 | D | | 26 | D | |
| 3 | D | | 9 | B | | 15 | B | | 21 | C | | 27 | B | |
| 4 | A | | 10 | B | | 16 | D | | 22 | C | | 28 | C | |
| 5 | A | | 11 | C | | 17 | C | | 23 | A | | 29 | B | |
| 6 | B | | 12 | B | | 18 | A | | 24 | B | | 30 | B | |

## Desarrollo

1. **Considere los puntos de coordenadas** $A(-2,-3)$**,** $B(1,0)$**,** $C(-1,2)$ **y** $D(-4,-1)$**. Verifique que** $\square ABCD$ **es un rectángulo y calcule su área.**

**Solución:**

Para probar que es un rectángulo basta con calcular las pendientes de las rectas que contienen sus lados y verificar que los lados opuestos son perpendiculares:

| Recta | Pendiente | Recta | Pendiente |
|---|---|---|---|
| $\overleftrightarrow{AB}$ | $\frac{3}{3}=1$ | $\overleftrightarrow{CD}$ | $\frac{3}{3}=1$ |
| $\overleftrightarrow{BC}$ | $\frac{2}{-2}=-1$ | $\overleftrightarrow{DA}$ | $\frac{2}{-2}=-1$ |

Por lo tanto $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{BC} \perp \overline{DC}, \overline{CD} \perp \overline{DA}$ y así se deduce que el cuadrilátero es un rectángulo.

Para calcular el área basta con determinar las medidas de dos lados consecutivos y multiplicarlas:

$AB = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}\ u.l.$ $AC = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}\ u.l.$ Área: $\left(2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}\right) = 12\ u.A.$

**2. Suponga que el peso *w*, en kilogramos, y la edad *t*, en meses, de un bebé están relacionados por una función lineal hasta los 6 meses. Si el bebé al nacer pesa 4 kg, y en tres meses aumentó a 5,8 kg, determine la función $w(t) = mt + b$ que relaciona el peso y la edad. ¿Cuál es el peso esperado a los 5,5 meses?**

**Solución:**

A partir de los datos dados se pueden deducir dos pares ordenados y así determinar el criterio de la función, ya que se dice que es lineal:

al nacer pesa 4 kg: $(0,4)$

en tres meses aumentó a 5,8 kg: $(3;5,8)$

$m = \dfrac{5,8-4}{3-0} = 0,6$ y $b = 4$ por lo que el criterio de la función es $w(t) = 0,6t + 4$.

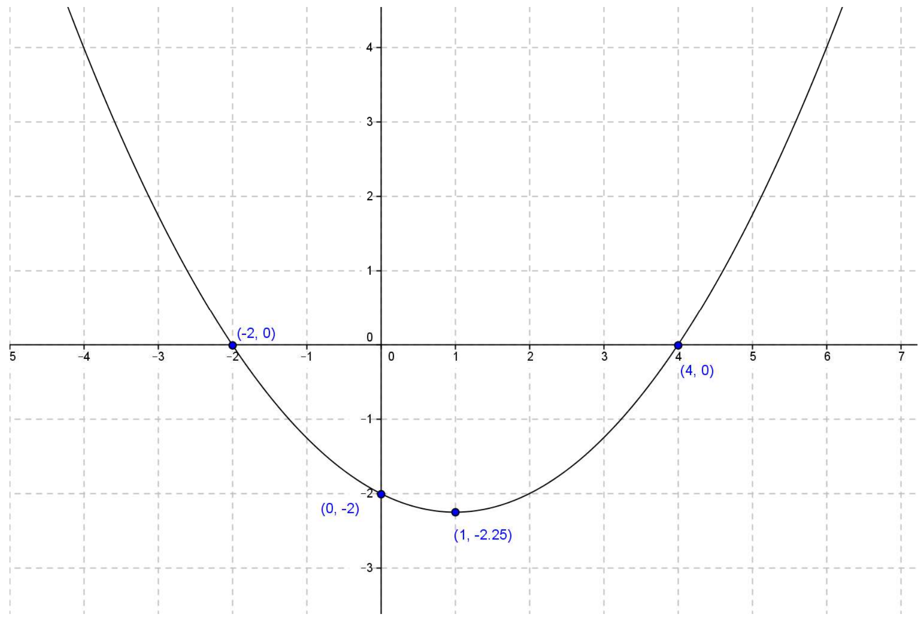
A los 5,5 meses el peso esperado es $w(5,5) = 0,6 \cdot 5,5 + 4 = 7,3$ kg.

**3. (7 puntos) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}x - 2$.**
**Determine el vértice, las intersecciones con el eje X y trace la gráfica.**

**Solución:**

Como $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}x - 2 = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 2x - 8\right) = \dfrac{1}{4}(x-4)(x+2)$ entonces las intersecciones con los ejes son: $(4,0)$, $(-2,0)$ y $(0,-2)$.

Además, $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}x - 2 = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 2x - 8\right) = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 2x + 1 - 9\right) = \dfrac{1}{4}(x-1)^2 - \dfrac{9}{4}$ por lo tanto, el vértice es el punto de coordenadas: $\left(1, -\dfrac{9}{4}\right)$.




**4. (4 puntos) Determine el conjunto solución de** $\log_3(3x+1)-\log_3(2x+3)<0$**.**

**<u>Solución</u>:**

a. Dominio: Para que la expresión esté bien definida en el conjunto de los números reales se debe cumplir que:

$$3x+1>0 \quad \wedge \quad 2x+3>0$$
$$x>-\frac{1}{3} \quad \wedge \quad x>-\frac{3}{2}$$
$$\text{por lo tanto } D=\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$$

b. Ahora, como la función logaritmo en base 3 es creciente, al simplificar la expresión se obtiene:

$$\log_3(3x+1)<\log_3(2x+3)$$
$$3x+1<2x+3$$
$$x<2$$

Pero como la expresión original solo está definida en el conjunto $\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$ entonces el conjunto solución es $\left]-\frac{1}{3},2\right[$.