



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



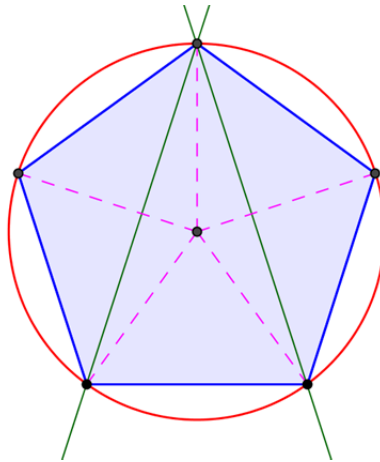
# MATEM 2014

-Undécimo Año-

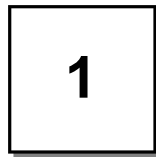
## III EXAMEN PARCIAL

Nombre: \_\_\_\_\_ código: \_\_\_\_\_

Colegio: \_\_\_\_\_



**Fórmula**



Miércoles 08 de octubre

## INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
3. Este examen consta de tres partes y un total de 60 puntos. La primera de ellas es de selección única (36 puntos), la segunda de respuesta corta (12 puntos) y la tercera es de desarrollo (12 puntos)
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En las preguntas de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En las preguntas de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará.**
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

**PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 36 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

**Trigonometría**

1. Si  $\left(p, \frac{1}{7}\right)$  es el par ordenado correspondiente a un punto de la circunferencia trigonométrica en el II cuadrante, entonces el valor de  $p$  es
  - (A)  $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$
  - (B)  $\frac{5\sqrt{2}}{7}$
  - (C)  $-\frac{5\sqrt{2}}{7}$
  - (D)  $\frac{4\sqrt{3}}{7}$
2. Si  $a$  y  $b$  son números positivos y al número real  $\beta$  le corresponde, en la circunferencia trigonométrica, el punto  $(-a, b)$ , entonces al número real  $\beta - \frac{5\pi}{2}$  le corresponde el punto
  - (A)  $(a, b)$
  - (B)  $(-a, b)$
  - (C)  $(a, -b)$
  - (D)  $(-a, -b)$
3. Al número real  $k$  le corresponde, en la circunferencia trigonométrica, el punto de coordenadas  $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10}\right)$ , entonces  $\tan k$  es igual a
  - (A)  $-3$
  - (B)  $-\frac{1}{3}$
  - (C)  $\frac{-30}{\sqrt{10}}$
  - (D)  $\frac{-3\sqrt{10}}{10}$

4. El punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real  $\frac{-17\pi}{6}$  es

(A)  $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

(B)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

(C)  $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(D)  $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

5. Considere la función  $f: \left[\frac{-5\pi}{2}, 0\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$  y analice las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de  $f$  interseca al eje X tres veces.

II.  $f(x) > 0$  para  $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

6. Considere la función  $f: \left[\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \tan x$  y analice las siguientes proposiciones:

I.  $f$  es inyectiva.

II. El ámbito de  $f$  es  $\mathbb{R}$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

7. Para que la función  $f : K \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$  tenga inversa, el conjunto  $K$  puede ser

- (A)  $[0, \pi]$
- (B)  $[-\pi, \pi]$
- (C)  $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- (D)  $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$

8. Considere las siguientes afirmaciones

- I.  $\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha$
- II.  $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$
- III.  $\cos(2\pi + \alpha) = \cos(-\alpha)$

De las anteriores proposiciones son verdaderas

- (A) La I y la II
- (B) La I y la III
- (C) La II y la III
- (D) Todas

9. Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $f(x) = \arctan(x)$  y analice las siguientes proposiciones:

- I.  $f$  es creciente.
- II.  $f(x) > 0$  para  $x \in \left] \frac{-\pi}{2}, 0 \right[$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- (A) Sólo la I
- (B) Sólo la II
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

10. Para la función  $f : [-1,1] \rightarrow \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ ,  $f(x) = \arcsen(x)$  es verdadero que

- (A)  $f(x) < 0$ , para todo  $x$
- (B)  $f$  es decreciente
- (C)  $f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1$
- (D)  $f(0) = 0$

11. La expresión  $\frac{1}{1 + \sen x} - \frac{1}{1 - \sen x}$  es equivalente a

- (A)  $-2 \tan x$
- (B)  $-2 \tan^2 x$
- (C)  $-2 \cot x \cdot \csc x$
- (D)  $-2 \tan x \cdot \sec x$

12. La expresión  $\frac{\cos x \cdot \tan^2 x}{\sec x + 1}$  es igual a

- (A)  $\sen^2 x$
- (B)  $\cos^2 x$
- (C)  $1 - \cos x$
- (D)  $\cos x - 1$

13. El conjunto solución de  $1 - \csc^2 x = 0$  es

- (A)  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
- (B)  $\{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
- (C)  $\left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$
- (D)  $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

14. El conjunto solución de la ecuación  $\sin(x) \tan(x) = \sin(x)$  en  $[0, 2\pi[$  es

- (A)  $\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4} \right\}$
- (B)  $\left\{ 0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$
- (C)  $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$
- (D)  $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$

15. La expresión  $\csc x - \csc x \cdot \cos^2 x$  es equivalente a

- (A)  $\sin x$
- (B)  $\cos x$
- (C)  $\sin^2 x$
- (D)  $\sin x \cdot \tan x$

16. En  $\mathbb{R}$ , el conjunto solución de  $\cos^2 x + 2 = 3 \cos x$  es el siguiente

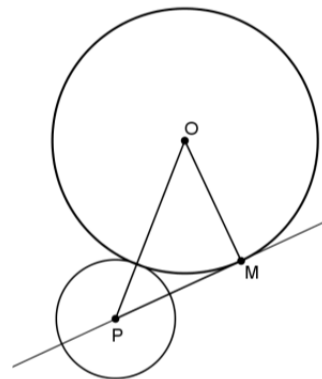
- (A)  $\emptyset$
- (B)  $\left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\}$
- (C)  $\{x \in \mathbb{R} / x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- (D)  $\{x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

### Geometría

17. Considere dos circunferencias tangentes interiormente. Si el diámetro de la circunferencia más pequeña es 28 cm y la distancia entre los centros es 15 cm, entonces, la longitud de la otra circunferencia es

- (A)  $29\pi$  cm
- (B)  $86\pi$  cm
- (C)  $43\pi$  cm
- (D)  $58\pi$  cm

18. La distancia entre los centros de dos circunferencias es 14, si la medida del radio de una es 8 y la del radio de la otra es 6, entonces se cumple que la circunferencias son
- (A) secantes.  
(B) concéntricas.  
(C) tangentes interiormente.  
(D) tangentes exteriormente.
19. La diferencia entre las medidas de los radios de dos circunferencias es de 4 cm. Si el diámetro de la circunferencia mayor es de 48 cm, entonces, ¿Cuál es la longitud del diámetro de la otra circunferencia?
- (A) 20  
(B) 24  
(C) 40  
(D) 44
20. El radio de una circunferencia es 20. ¿Cuál es la longitud de una cuerda que está a una distancia de 12 del centro de la circunferencia?
- (A) 16  
(B) 32  
(C)  $2\sqrt{11}$   
(D)  $4\sqrt{34}$
21. En la figura, las circunferencias son tangentes exteriormente y la recta es tangente a la circunferencia mayor en  $M$ . si  $MP=5$  y  $OM=12$  entonces la medida del diámetro de la circunferencia pequeña es



- (A) 1  
(B) 2  
(C) 13  
(D) 24



22. Sean  $\overline{DB}$  y  $\overline{AC}$  cuerdas de una circunferencia que se cortan en un punto  $M$ , si  $AM = 3 \text{ cm}$ ,  $BM = 8 \text{ cm}$  y  $MD = 6 \text{ cm}$ , entonces  $MC$  es igual a

- (A)  $16 \text{ cm}$
- (B)  $4 \text{ cm}$
- (C)  $\frac{9}{4} \text{ cm}$
- (D)  $4\sqrt{2} \text{ cm}$

23. Sea  $\overline{TE}$  tangente a la circunferencia de centro  $O$  en el punto  $T$ ,  $\overline{BE}$  secante a la circunferencia,  $E-A-B$ ,  $A$  y  $B$  son puntos de la circunferencia,  $EA = 4$ ,  $AB = 10$ , entonces la medida de  $\overline{TE}$  es igual a

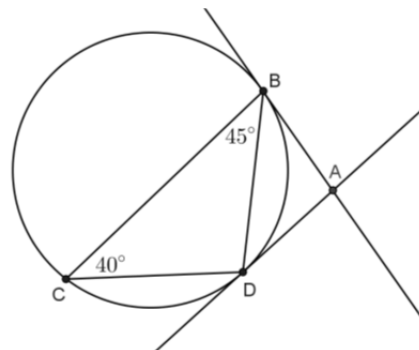
- (A)  $2\sqrt{14}$
- (B)  $2\sqrt{10}$
- (C)  $\sqrt{14}$
- (D)  $\sqrt{6}$

24. En un circunferencia de centro  $M$ ,  $\overline{SB}$  es un diámetro y  $\overline{AB}$  una cuerda congruente con el radio, entonces la  $m\angle ASB$  es igual a

- (A)  $30^\circ$
- (B)  $60^\circ$
- (C)  $90^\circ$
- (D)  $120^\circ$

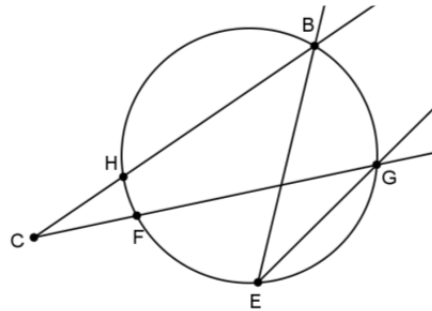
25. De acuerdo con los datos de la figura, si  $\overline{AB}$  y  $\overline{AD}$  son tangentes a la circunferencia en  $B$  y  $D$  respectivamente, entonces la medida del  $\angle BAD$  es igual a

- (A)  $55^\circ$
- (B)  $100^\circ$
- (C)  $90^\circ$
- (D)  $135^\circ$



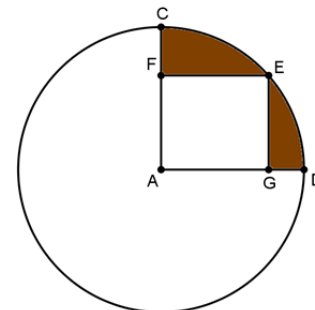
26. En la figura,  $m\widehat{HF} = 18^\circ$  y  $m\angle C = 22^\circ$ , entonces la  $m\angle E$  es igual a

- (A)  $62^\circ$
- (B)  $31^\circ$
- (C)  $26^\circ$
- (D)  $13^\circ$



27. En la figura,  $\square AFEG$  es un cuadrado de perímetro 24 cm. El área de la región sombreada es aproximadamente

- (A)  $20,52 \text{ cm}^2$
- (B)  $95,04 \text{ cm}^2$
- (C)  $38,52 \text{ cm}^2$
- (D)  $7,74 \text{ cm}^2$



A: centro de la circunferencia

28. El área de una corona circular es  $45\pi \text{ cm}^2$ . Si el radio de la circunferencia menor mide 2 cm entonces, la longitud de la circunferencia mayor es

- (A)  $20\pi$
- (B)  $14\pi$
- (C)  $10\pi$
- (D)  $7\pi$

29. Un polígono convexo de veinticinco ángulos internos tiene el siguiente número de diagonales

- (A) 180
- (B) 275
- (C) 550
- (D) 4140

30. Si el radio de la circunferencia inscrita a un polígono regular de tres lados mide  $12\text{ cm}$  entonces el lado del polígono mide
- (A)  $12\sqrt{3}\text{ cm}$
  - (B)  $36\text{ cm}$
  - (C)  $24\sqrt{3}\text{ cm}$
  - (D)  $18\text{ cm}$
31. Si la longitud de la circunferencia circunscrita en un triángulo equilátero es  $12\pi\text{ cm}$ , entonces la medida en centímetros de la altura de dicho triángulo es
- (A) 9
  - (B) 18
  - (C)  $3\sqrt{3}$
  - (D)  $6\sqrt{3}$
32. Las bases de un prisma recto son hexágonos regulares, si cada lado de ese hexágono mide  $4\text{ cm}$  y la altura del prisma es  $10\text{ cm}$ , el área total de dicho prisma es aproximadamente
- (A)  $323,04\text{ cm}^2$
  - (B)  $281,52\text{ cm}^2$
  - (C)  $203,04\text{ cm}^2$
  - (D)  $406,08\text{ cm}^2$
33. Considere una pirámide recta cuya base es un cuadrado de  $24\text{ cm}$  de lado y su arista lateral mide  $37\text{ cm}$ . La altura de dicha pirámide mide
- (A) 35 cm
  - (B)  $\sqrt{793}\text{ cm}$
  - (C)  $\sqrt{1513}\text{ cm}$
  - (D)  $\sqrt{1081}\text{ cm}$

34. Un florero con forma cilíndrica tiene un diámetro interior de 12 cm y su altura es de 25 cm. Si se quiere llenar hasta los dos tercios de su capacidad. ¿Cuántos litros de agua se necesitan? (recuerde que 1 *litro* = 1000  $cm^3$ ).
- (A) 3,600  
(B) 0,942  
(C) 2,826  
(D) 1,884
35. El volumen de un cilindro recto de radio  $r$  es 10. Entonces, el área lateral de dicho cilindro es igual
- (A)  $\frac{20}{\pi r}$   
(B)  $\frac{10}{\pi r}$   
(C)  $\frac{20}{r}$   
(D)  $\frac{10}{r}$
36. Si la altura de un cono mide 8  $cm$  y la circunferencia de la base mide  $12\pi cm$  entonces el área lateral del cono es
- (A)  $30\pi cm^2$   
(B)  $36\pi cm^2$   
(C)  $60\pi cm^2$   
(D)  $96\pi cm^2$

*Fin de la primera parte*



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



**TERCER EXAMEN PARCIAL 2014 - miércoles 08 de octubre**

Nombre completo: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

COLEGIO: \_\_\_\_\_

PREGUNTA	Puntos obtenidos
Respuesta Corta	
Desarrollo 1	
Desarrollo 2	

**SEGUNDA PARTE. RESPUESTA CORTA (Valor 12 puntos)**

Escriba en el espacio indicado la expresión o resultado que se le solicita en cada apartado. Cada pregunta tiene un valor de 1 punto.

1. Escriba el resultado (valor numérico y que no incluya expresiones trigonométricas) de cada una de las siguientes expresiones:

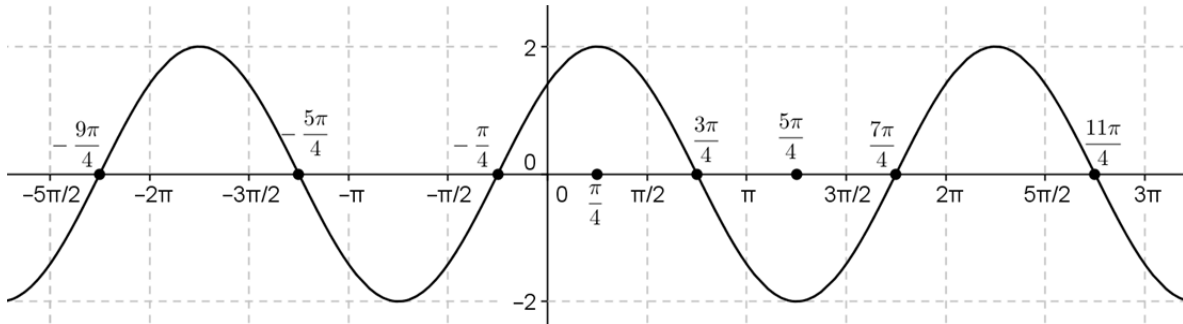
a)  $\text{sen}(-2014\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$

b)  $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

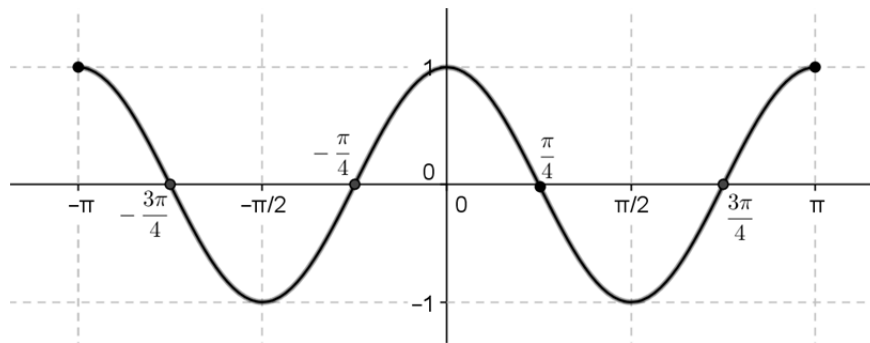
c)  $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

d)  $\sec\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. A continuación se presenta una parte de la gráfica de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = m \cdot \text{sen}(x+k)$ . Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita:



- a) El valor  $K$  es igual a: \_\_\_\_\_
- b) La amplitud de  $f$  : \_\_\_\_\_
- c) El punto de intersección con el eje Y: \_\_\_\_\_
3. A continuación se presenta la gráfica de la función  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \cos(bx)$ . Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita:



- a) El periodo de  $f$  : \_\_\_\_\_
- b) El valor de  $b$  es igual a: \_\_\_\_\_
- c) El valor de  $a$  es igual a: \_\_\_\_\_

4. Escriba el resultado (valor numérico) de cada una de las siguientes expresiones:

a)  $\pi \cdot \arccos(0) =$  \_\_\_\_\_

b)  $\arctan(-1) =$  \_\_\_\_\_

### **TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 12 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta. Cada pregunta tiene un valor de 6 puntos.

1. La apotema de un hexágono regular mide  $6 \text{ cm}$ .
  - a. Haga una representación gráfica.
  - b. Determine el área del hexágono.
  - c. Determine el área de la corona circular definida por la circunferencia inscrita y la circunscrita.

2. Determine el conjunto de todos los números reales que son solución de la ecuación:

$$2 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - \sqrt{3} \cos(x) = \sqrt{3}$$

*Fin del examen*





Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



## MATEM 2014 - Undécimo

### SOLUCIONARIO

TERCER EXAMEN PARCIAL 2014 - Miércoles 08 de octubre

#### SELECCIÓN ÚNICA

1	A		8	C		15	A		22	A		29	B		36	C
2	A		9	A		16	D		23	A		30	C			
3	A		10	D		17	D		24	A		31	A			
4	A		11	D		18	D		25	B		32	A			
5	A		12	C		19	C		26	B		33	D			
6	A		13	A		20	B		27	A		34	D			
7	D		14	B		21	B		28	B		35	C			

#### SEGUNDA PARTE. RESPUESTA CORTA (Valor 12 puntos)

Escriba en el espacio indicado la expresión o resultado que se le solicita en cada apartado. Cada pregunta tiene un valor de 1 punto.

- Escriba el resultado (valor numérico y que no incluya expresiones trigonométricas) de cada una de las siguientes expresiones:

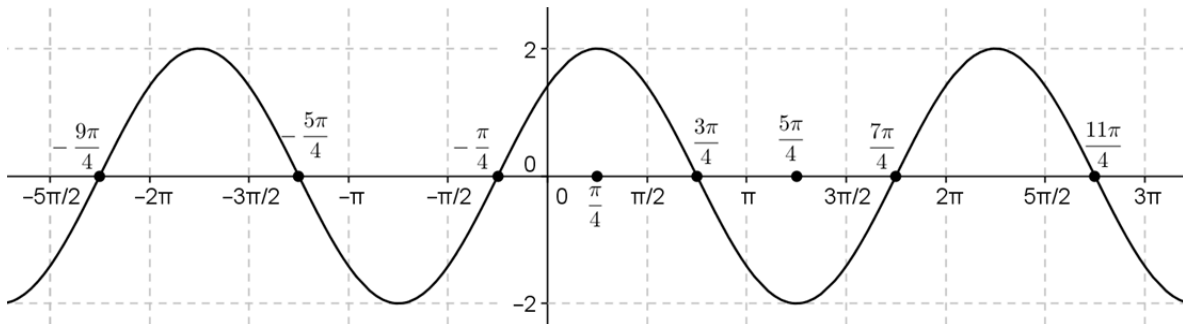
a)  $\text{sen}(-2014\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$  **0**

b)  $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$   **$\frac{1}{2}$**

c)  $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$  **1**

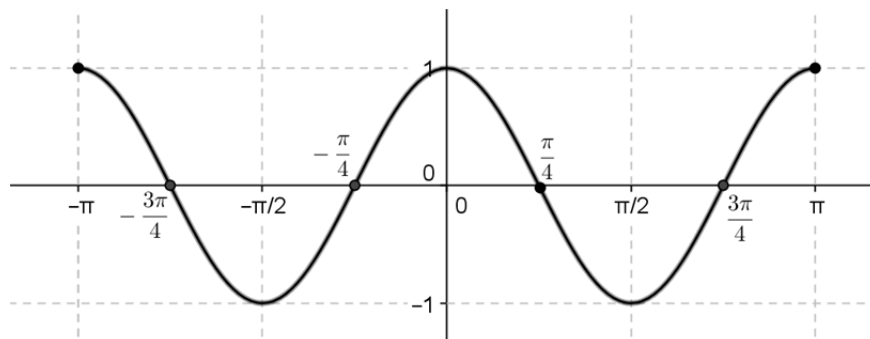
d)  $\sec\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$  **-2**

2. A continuación se presenta una parte de la gráfica de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = m \cdot \text{sen}(x + k)$ . Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita:



- a) El valor  $K$  es igual a: \_\_\_\_\_  $\frac{\pi}{4}$  hacia la izquierda
- b) La amplitud de  $f$  : \_\_\_\_\_ 2
- c) El punto de intersección con el eje Y: \_\_\_\_\_  $(0, \sqrt{2})$

3. A continuación se presenta la gráfica de la función  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \cos(bx)$ . Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita:



- a) El periodo de  $f$  : \_\_\_\_\_  $\pi$
- b) El valor de  $b$  es igual a: \_\_\_\_\_ 2
- c) El valor de  $a$  es igual a: \_\_\_\_\_ 1

4. Escriba el resultado (valor numérico) de cada una de las siguientes expresiones:

a)  $\pi \cdot \arcsin(0) = \underline{\hspace{2cm}} \frac{\pi^2}{2}$

b)  $\arctan(-1) = \underline{\hspace{2cm}} \frac{-\pi}{4}$

### TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 12 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta. Cada pregunta tiene un valor de 6 puntos.

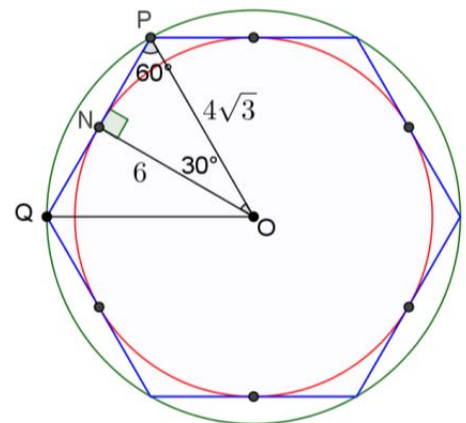
1. La apotema de un hexágono regular mide 6 cm .
  - a. Haga una representación gráfica.
  - b. Determine el área del hexágono.
  - c. Determine el área de la corona circular definida por la circunferencia inscrita y la circunscrita.

Solución:

En la figura,  $QP = PO = 4\sqrt{3}$ .

$$\text{Área del hexágono: } A_H = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área de la corona circular: } A_C = \pi \left[ (4\sqrt{3})^2 - 6^2 \right] = 12\pi \text{ cm}^2$$



2. Determine el conjunto de todos los números reales que son solución de la ecuación:

$$2 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - \sqrt{3} \cos(x) = \sqrt{3}$$

Solución:

$$2 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - \sqrt{3} \cos(x) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - \sqrt{3} \cos(x) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2(x) + (2 - \sqrt{3}) \cos(x) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos(x) - \sqrt{3})(\cos(x) + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(x) - \sqrt{3} = 0 \vee \cos(x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \cos(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$