



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



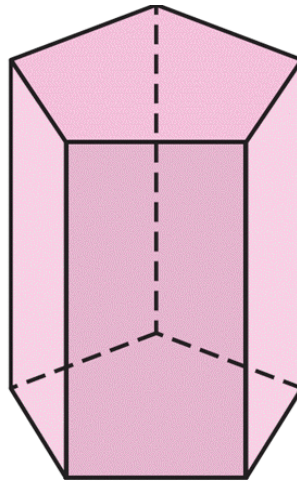
# MATEM 2013

-Undécimo Año-

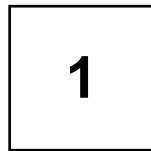
## III EXAMEN PARCIAL

Nombre: \_\_\_\_\_ código: \_\_\_\_\_

Colegio: \_\_\_\_\_



**Fórmula**



Miércoles 09 de octubre

## **INSTRUCCIONES**

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (36 puntos) y la segunda es de desarrollo (18 puntos)
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En las preguntas de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En las preguntas de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará.**
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

**PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 36 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

**Trigonometría**

1. Considere los siguientes puntos de coordenadas:

I.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

II.  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

¿Cuáles de ellos pertenecen a la circunferencia trigonométrica?

- (A) Sólo I.
- (B) Sólo II.
- (C) Ambos.
- (D) Ninguno.

2. Si al número real  $x$  le corresponde el punto de coordenadas  $(\alpha, \beta)$  de la circunferencia trigonométrica, con  $\alpha \cdot \beta > 0$ , con CERTEZA se cumple que:

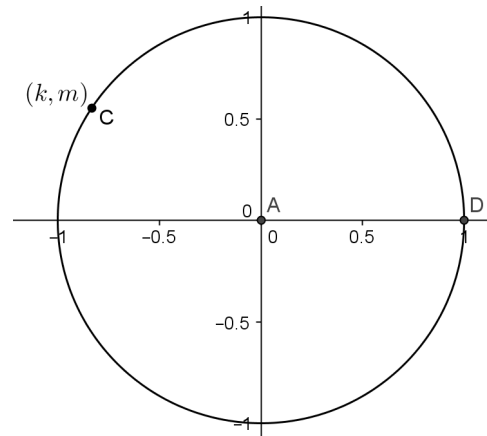
- (A)  $\cos x = \beta$
- (B)  $\sec x = \frac{1}{\alpha}$
- (C)  $\tan x = \frac{\alpha}{\beta}$
- (D)  $(\beta + \alpha)^2 = 1$

3. ¿A cuál de los siguientes números reales le corresponde un punto de la circunferencia trigonométrica en el IV cuadrante?

- (A)  $2\pi$
- (B)  $\frac{1}{7}$
- (C)  $\frac{-1}{7}$
- (D)  $-6,28$

4. En la figura,  $m\widehat{DC} = x$ . Entonces, con certeza se cumple que

- (A)  $\text{sen } x \cdot \cos x > 0$
- (B)  $\cos(\pi - x) = k$
- (C)  $\cos x = -k$
- (D)  $\text{sen } x = m$



5. El punto de la circunferencia trigonométrica correspondiente al número real  $\frac{17\pi}{6}$

es

- (A)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- (B)  $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- (C)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
- (D)  $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

6. La expresión  $\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  es igual a

- (A) 1
- (B) 0
- (C) -1
- (D) -2

7. Considere los siguientes números reales:

I.  $\operatorname{sen}(4)$

II.  $\tan(7)$

¿Cuáles de ellos son **positivos**?

- (A) Sólo I.
- (B) Sólo II.
- (C) Ambos.
- (D) Ninguno.

8. La expresión  $\operatorname{csc}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  es igual a

- (A)  $\frac{-1}{2}$
- (B) -2
- (C)  $\frac{1}{2}$
- (D) 2

9. Considere la función  $f: \left[ \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = \cos x$  y analice las

siguientes proposiciones

I) El ámbito de  $f$  es  $[-1, 1]$

II)  $f$  es decreciente en  $\left] \frac{-3\pi}{2}, -\pi \right[$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

10. Para la función  $f: \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \tan x$  se cumple que

(A) el ámbito es  $\mathbb{R}$ .

(B) las imágenes son positivas.

(C) la gráfica interseca al eje X.

(D) es decreciente.

Considere la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$  y con base en ella responda los ítemes 11 a 14

11. El periodo de  $f$  es

- (A)  $2\pi$
- (B)  $\frac{2\pi}{3}$
- (C)  $\frac{3\pi}{2}$
- (D)  $\frac{\pi}{2}$

12. El ámbito de  $f$  corresponde a

- (A)  $] -2, 2[$
- (B)  $[ -2, 2 ]$
- (C)  $\left[ \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$
- (D)  $\left[ \frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$

13. Un corte de la gráfica  $f$  con el eje X es

- (A)  $\left( \frac{2\pi}{3}, 0 \right)$
- (B)  $\left( \frac{-2\pi}{3}, 0 \right)$
- (C)  $(\pi, 0)$
- (D)  $\left( \frac{3\pi}{2}, 0 \right)$

14. La gráfica de  $f$  interseca al eje Y en el punto

- (A)  $(0, -1)$
- (B)  $(0, -2)$
- (C)  $(0, 2)$
- (D)  $(0, 0)$

15. El valor de  $\arcsen\left(\sen\frac{7\pi}{4}\right)$  es

- (A)  $\frac{-\pi}{4}$
- (B)  $\frac{\pi}{4}$
- (C)  $\frac{-3\pi}{4}$
- (D)  $\frac{7\pi}{4}$

16. La expresión  $\sen\left(\arctan\frac{4}{3}\right)$  es igual a

- (A)  $\frac{\sqrt{7}}{3}$
- (B)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$
- (C)  $\frac{3}{5}$
- (D)  $\frac{4}{5}$



17. Si  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  para cualquier número entero  $k$ , la expresión  $\frac{\cos(-x)}{\sec(x)} - \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\csc(x)}$  es equivalente a

- (A) 1
- (B) -1
- (C)  $\cos(2x)$
- (D)  $-\cos(2x)$

18. Si  $x \in [0, 2\pi[$  entonces, las soluciones de la ecuación  $2\operatorname{sen}x \cos x = \operatorname{sen}x$  son

- (A)  $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
- (B)  $0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (C)  $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (D)  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

19. Una solución de  $2\sqrt{3} + \cos x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$  es

- (A)  $\frac{\pi}{3}$
- (B)  $\frac{5\pi}{6}$
- (C)  $\frac{5\pi}{3}$
- (D)  $\frac{11\pi}{6}$

20. El conjunto de soluciones de la ecuación  $2\operatorname{sen}(6x) - 1 = 0$  es

- (A)  $\left\{ \frac{\pi}{36} + 2k\pi, \frac{5\pi}{36} + 2k\pi, k \in Z \right\}$
- (B)  $\left\{ \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, \frac{5\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, k \in Z \right\}$
- (C)  $\left\{ \frac{\pi}{18} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \right\}$
- (D)  $\left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in Z \right\}$

### Geometría

21. Los diámetros de dos circunferencias concéntricas mide 8 cm y 12 cm. Entonces, la distancia entre sus centros, en centímetros, es igual a

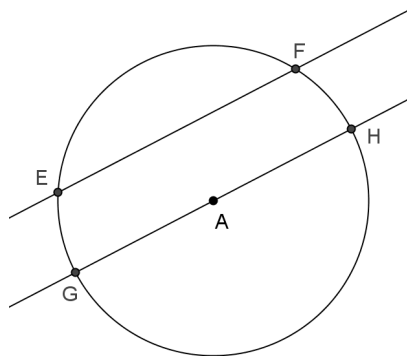
- (A) 4
- (B) 2
- (C) 1
- (D) 0

22. En dos circunferencias tangentes exteriormente, el radio de una es el doble del radio de la otra. Si la suma de las áreas es  $125\pi$ . La distancia entre los centros es igual a

- (A) 15
- (B) 20
- (C) 25
- (D) 22,5

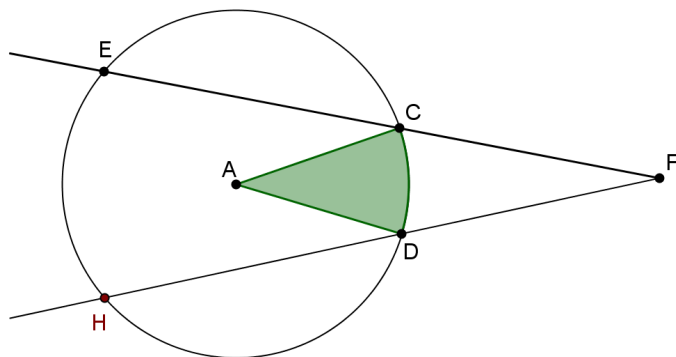
23. En la figura,  $A$  es el centro de la circunferencia,  $G - A - H$  y  $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ ,  $m\widehat{EF} = 120^\circ$  y la distancia del centro a  $\overline{EF}$  es 5 cm. Entonces, el diámetro de la circunferencia mide, en cm,

- (A) 10
- (B) 20
- (C)  $5\sqrt{3}$
- (D)  $10\sqrt{3}$



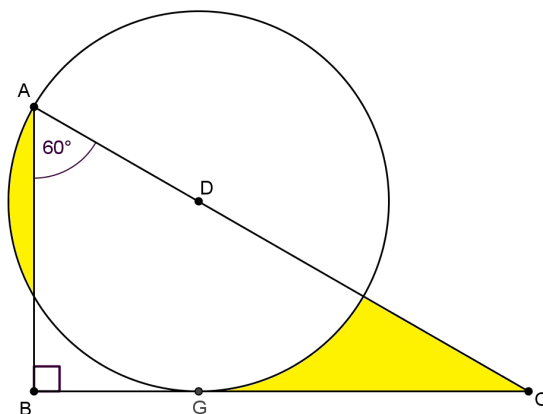
24. En la figura,  $A$  es el centro de la circunferencia,  $E - C - F$ ,  $H - D - F$ ,  $AC = 7$ ,  $m\widehat{EH} = 83^\circ$  y  $m\angle F = 24^\circ$ . El área de la región sombreada es igual a

- (A)  $\frac{343\pi}{72}$
- (B)  $\frac{343\pi}{36}$
- (C)  $\frac{49\pi}{72}$
- (D)  $\frac{49\pi}{36}$



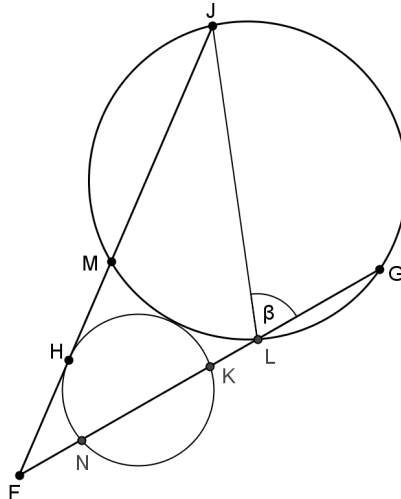
25. En la figura,  $D$  es el centro de la circunferencia,  $\overline{BC}$  es tangente a la circunferencia en  $G$  y  $AD = 4$ . El área de la región sombreada es igual a

- (A)  $16\sqrt{3}$
- (B)  $12\sqrt{3}$
- (C)  $8\sqrt{3}$
- (D)  $4\sqrt{3}$



En la siguiente figura,  $\overline{FH}$  es tangente al círculo pequeño en  $H$ ,  $m\angle F = 40^\circ$ ,  $m\widehat{ML} = 50^\circ$ ,  $FH = 7$  y  $FK = 11$ .

Utilice esta información para contestar las preguntas 26 y 27



26. El valor de  $\beta$  es igual a

- (A)  $20^\circ$
- (B)  $60^\circ$
- (C)  $55^\circ$
- (D)  $65^\circ$

27.  $FN$  es igual a

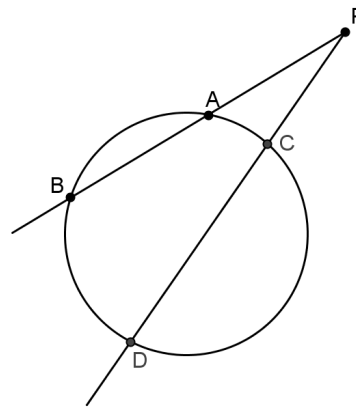
- (A)  $\frac{49}{11}$
- (B)  $\frac{7}{49}$
- (C)  $\frac{7}{11}$
- (D)  $\frac{49}{7}$

28. Los radios de dos circunferencias concéntricas miden  $5\sqrt{3}$  cm y  $\sqrt{2}$  cm. El área de la corona circular determinada por ellas es igual a

- (A)  $71\pi$
- (B)  $13\pi$
- (C)  $77\pi$
- (D)  $73\pi$

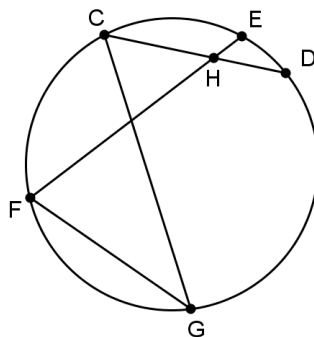
29. En la figura,  $\overline{AB} \cong \overline{AP}$ ,  $CD = 14$  y  $CP = 4$ , entonces,  $PB$  es igual a

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 10
- (D) 12

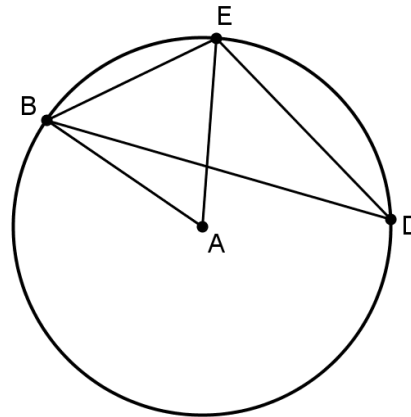


30. En la figura,  $m\angle CHF = 50^\circ$ ,  $m\widehat{ED} = 20^\circ$ . Entonces,  $m\angle CGF$  es igual a

- (A)  $40^\circ$
- (B)  $50^\circ$
- (C)  $60^\circ$
- (D)  $80^\circ$



31. En la figura, A es el centro de la circunferencia y  $BE = AB$ , la medida del  $\sphericalangle D$  es igual a



- (A)  $20^\circ$
- (B)  $30^\circ$
- (C)  $45^\circ$
- (D)  $60^\circ$

32. Si el área de un hexágono regular es  $225\sqrt{3} \text{ cm}^2$  entonces su radio mide

- (A)  $30 \text{ cm}$
- (B)  $20 \text{ cm}$
- (C)  $5\sqrt{6} \text{ cm}$
- (D)  $\frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$

33. Si el área de un cuadrado mide  $100 \text{ cm}^2$  entonces el área del círculo circunscrito al cuadrado mide

- (A)  $25\pi \text{ cm}^2$
- (B)  $50\pi \text{ cm}^2$
- (C)  $10\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$
- (D)  $200\pi \text{ cm}^2$

34. Si un ángulo externo de un polígono regular mide  $40^\circ$  entonces cada uno de sus ángulos internos mide

- (A)  $140^\circ$
- (B)  $80^\circ$
- (C)  $40^\circ$
- (D)  $9^\circ$

35. Si un polígono tiene, en total 189 diagonales entonces tiene el siguiente número de lados

- (A) 13
- (B) 18
- (C) 21
- (D) 60

36. Si el radio de un pentadecágono regular es  $5\text{ cm}$  y su apotema mide aproximadamente  $4,89\text{ cm}$  entonces su área es

- (A)  $76,28\text{ cm}^2$
- (B)  $11,89\text{ cm}^2$
- (C)  $12,75\text{ cm}^2$
- (D)  $38,25\text{ cm}^2$

*Fin de la primera parte*







Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



**TERCER EXAMEN PARCIAL 2013 - miércoles 09 de octubre**

Nombre completo: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

COLEGIO: \_\_\_\_\_

PREGUNTA	Puntos obtenidos
Desarrollo 1	
Desarrollo 2	
Desarrollo 3	

**SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 18 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta. Cada pregunta tiene un valor de 6 puntos.

1. Si una cara lateral de una pirámide cuadrangular recta tiene área de  $24 \text{ cm}^2$  y cada lado de la base mide  $4 \text{ cm}$ . Determine el volumen de la pirámide.

2. Determine, en  $\mathbb{R}$ , el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{\cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$$

3. Verifique la siguiente identidad trigonométrica (se supone definida en su dominio).

$$\frac{\tan(x)}{1 + \sec(x)} - \frac{\tan(x)}{1 - \sec(x)} = 2 \csc x$$


**MATEM 2013 - Undécimo**
**SOLUCIONARIO**
**TERCER EXAMEN PARCIAL 2013 - Miércoles 09 de octubre**
**Desarrollo**

1. Si una cara lateral de una pirámide cuadrangular recta tiene área de  $24 \text{ cm}^2$  y cada lado de la base mide  $4 \text{ cm}$ . Determine el volumen de la pirámide.

**Solución:**

Consideremos la pirámide cuadrangular siguiente, donde, de acuerdo a los datos dados:

$$\text{área del } \triangle BFC = 24 \text{ y } BC = 4.$$

Entonces:

a.  $\text{área del } \triangle BFC = \frac{BC \cdot FG}{2}$

b.  $24 = \frac{4 \cdot FG}{2} \Rightarrow FG = 12$

c. Como  $BC = AB$ , entonces  $EG = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$

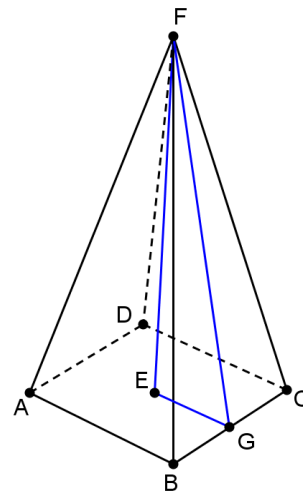
d. Por Teorema de Pitágoras:

$$(EG)^2 + (EF)^2 = (FG)^2$$

$$\Rightarrow 2^2 + (EF)^2 = 12^2$$

$$\Rightarrow EF = 2\sqrt{35}$$

e. Volumen de la pirámide:  $V = \frac{(AB)^2 \cdot EF}{3} = \frac{4^2 \cdot 2\sqrt{35}}{3} = \frac{32\sqrt{35}}{3}$



2. Determine, en  $\mathbb{R}$ , el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{\cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$$

Solución:

Note que la expresión está definida cuando  $\operatorname{sen} x \neq 0$ , es decir, cuando  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\frac{\cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \text{ con } \operatorname{sen} x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0, \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0, \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Como  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , el conjunto solución es

$$S = \left\{ x / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3. Verifique la siguiente identidad trigonométrica (se supone definida en su dominio).

$$\frac{\tan(x)}{1 + \sec(x)} - \frac{\tan(x)}{1 - \sec(x)} = 2 \csc x$$

Solución:

$$\frac{\tan x}{1 + \sec x} - \frac{\tan x}{1 - \sec x} = \tan x \cdot \left( \frac{1}{1 + \sec x} - \frac{1}{1 - \sec x} \right)$$

$$= \tan x \cdot \left( \frac{1 - \sec x - (1 + \sec x)}{1 - \sec^2 x} \right)$$

$$= \tan x \cdot \left( \frac{1 - \sec x - 1 - \sec x}{-\tan^2 x} \right) = \frac{2 \sec x}{\tan x}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2}{\sin x} = 2 \csc x$$

SELECCIÓN ÚNICA

1	D		8	D		15	A		22	A		29	D		36	A
2	B		9	B		16	D		23	B		30	A			
3	C		10	B		17	A		24	A		31	B			
4	D		11	B		18	B		25	D		32	C			
5	B		12	B		19	D		26	D		33	B			
6	C		13	D		20	B		27	A		34	A			
7	B		14	B		21	D		28	D		35	C			