Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

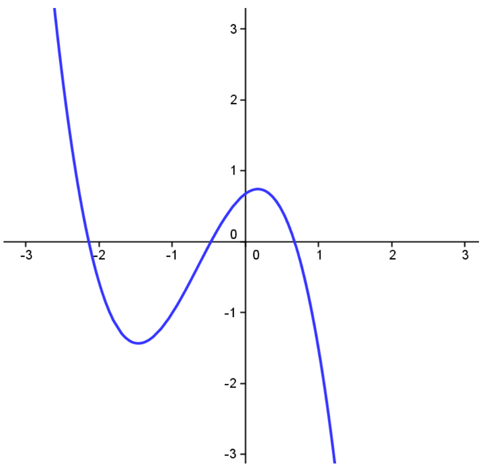
MATEM 2012

-Undécimo Año-

III EXAMEN PARCIAL 2012

Nombre: ________________________________ código: _______

Colegio: ____



Fórmula

1

Sábado 13 de octubre de 2012

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (36 puntos) y la segunda es de desarrollo (18 puntos)

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 36 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

Geometría

1. Considere una circunferencia de centro A y 20π cm de longitud. Si B y C son puntos coplanares con la circunferencia tales que $AB = 6cm$ y AC = $12cm$. Analice las siguientes afirmaciones:

   I. B debe ser un punto interior a la circunferencia.

   II. C debe ser un punto en el exterior de la circunferencia.

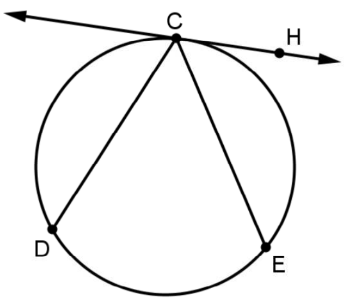
   De ellas, son **verdaderas**

(A) Sólo la I
(B) Sólo la II
(C) I y II
(D) Ninguna

2. Una cuerda de una circunferencia mide $12\ cm$ y dista $6\ cm$ del centro. Entonces, la medida del diámetro de dicha circunferencia es igual a

(A) $12\sqrt{2}\ cm$
(B) $6\sqrt{2}\ cm$
(C) $4\sqrt{2}\ cm$
(D) $3\sqrt{2}\ cm$

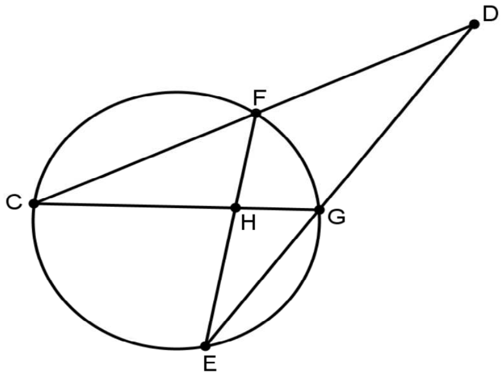
3. En la figura, $\overleftrightarrow{CH}$ es tangente a la circunferencia en C, $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ y $m\measuredangle DCE = 25^\circ$. Entonces, el $\measuredangle ECH$ mide



(A) 83,75º
(B) 77,5º
(C) 65º
(D) 85º

Utilice la siguiente figura y la información que se presenta de la misma para responder las preguntas 4 y 5.

En la figura $m\measuredangle D = 28^{\circ}$ y $m\overset{\frown}{CE} = 88^{\circ}$.



4. La medida del $\overset{\frown}{FG}$ es igual a

(A) 120°

(B) 64°

(C) 36°

(D) 32°

5. La medida del $\measuredangle CHF$ es igual a

(A) 140°

(B) 120°

(C) 60°

(D) 30°

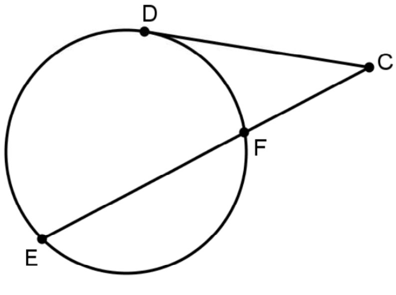
6. En la figura, $DC = 16$ y $EF = 24$, entonces la medida del $\overline{EC}$ es igual a

(A) 64 *cm*

(B) 32 *cm*

(C) 8 *cm*

(D) $\frac{32}{3}$ *cm*



7. En una circunferencia, $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ son cuerdas que se intersecan en E. Si $CE = 2$, $ED = 4$ y $EB = 3$. Entonces, la medida del $\overline{AE}$ es igual a

(A) $\frac{3}{8}$ cm

(B) $\frac{2}{3}$ cm

(C) $\frac{3}{2}$ cm

(D) $\frac{8}{3}$ cm

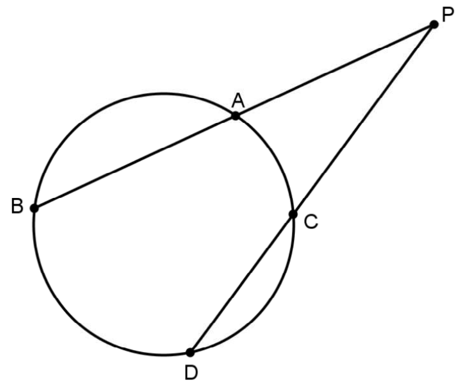
8. En la figura, $AP = 6$, $BP = 15$ y $CP = 8$. Entonces, la medida del $\overline{PD}$ es igual a

(A) $\frac{13}{4}$

(B) $\frac{45}{4}$

(C) $\frac{54}{8}$

(D) $\frac{45}{8}$



9. Analice las siguientes afirmaciones:

I. Cada ángulo central de un polígono regular de 15 lados mide 24º.

II. Cada ángulo interno de un dodecágono mide 150°.

¿Cuáles de las afirmaciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I.

(B) Sólo la II.

(C) Ambas.

(D) Ninguna.

10. El área de un triángulo equilátero es $36\sqrt{3}\ cm^2$. Entonces, la apotema mide

(A) 6 cm

(B) 9 cm

(C) $2\sqrt{3}$ cm

(D) $4\sqrt{3}$ cm

11. En un polígono en el cual se puede trazar un total de 35 diagonales, si cada lado mide 6cm entonces el semiperímetro es

(A) 60 cm

(B) 42 cm

(C) 30 cm

(D) 21 cm

12. El polígono en el cual se puede 7 diagonales desde un vértice recibe el siguiente nombre

(A) pentadecágono

(B) dodecágono

(C) nonágono

(D) decágono

13. Si el radio de un hexágono regular mide 18 cm, entonces su área es

(A) $243\sqrt{3}\ cm^2$

(B) $486\sqrt{3}\ cm^2$

(C) $972\sqrt{3}\ cm^2$

(D) $\frac{243}{2}\sqrt{3}\ cm^2$

14. En una caja de base rectangular sin tapa, las dimensiones de la base están en la razón 2:3 y la altura mide 5dm. Si el volumen del paralelepípedo es 270 dm^3 entonces el perímetro de la base es

(A) 90 dm
(B) 45 dm
(C) 30 dm
(D) 15 dm

15. En una esfera de área $A\ cm^2$ y volumen $V\ cm^3$ se cumple que $A = 27V$ entonces el radio de la esfera mide

(A) $\frac{1}{9}$ cm
(B) $\frac{1}{3}$ cm
(C) 9 cm
(D) 3 cm

16. La altura de un cono circular recto mide $4\ cm$ y el radio mide $3\ cm$. Entonces, el área lateral es igual a

(A) $12\pi\ cm^2$
(B) $15\pi\ cm^2$
(C) $25\pi\ cm^2$
(D) $34\pi\ cm^2$

Trigonometría

17. Considere los siguientes puntos de coordenadas:

I. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}, \dfrac{-\sqrt{42}}{7}\right)$

II. $\left(\dfrac{1}{11}, \dfrac{10}{11}\right)$

¿Cuáles de ellos pertenecen a la circunferencia trigonométrica?

(A) Sólo I.
(B) Sólo II.
(C) Ambos.
(D) Ninguno.

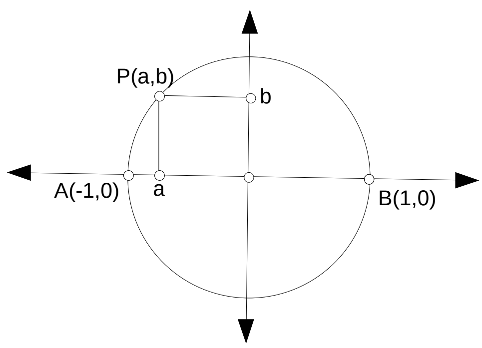
18. De acuerdo con los datos de la figura, si θ es la longitud del arco menor $\overset{\frown}{BP}$ analice las siguientes afirmaciones:

I. $\sec\theta = \dfrac{1}{b}$

II. $\tan\theta = -\dfrac{b}{a}$

III. $\cos\theta < \operatorname{sen}\theta$

De ellas, **son verdaderas**



(A) Solamente I
(B) Solamente II
(C) Solamente III
(D) Solamente II y III

19. Considere los siguientes números reales:

$$m=\frac{-7\pi}{6} \qquad \text{y} \qquad n=\frac{19}{12}$$

¿A cuáles de ellos corresponde un punto de la circunferencia trigonométrica en el II cuadrante?

(A) Sólo m.

(B) Sólo n.

(C) Ambos.

(D) Ninguno.

20. El punto de la circunferencia trigonométrica correspondiente al número real $\frac{14\pi}{3}$ es

(A) $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

(D) $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

21. La expresión $\tan\left(\frac{-17\pi}{6}\right)+\sec\left(\frac{-17\pi}{6}\right)$ es igual a

(A) $\sqrt{3}$

(B) $-\sqrt{3}$

(C) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

22. Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$ entonces $\cos\alpha$ es igual a

(A) $\frac{8}{13}$

(B) $\frac{12}{13}$

(C) $\frac{-8}{13}$

(D) $-\frac{12}{13}$

23. La expresión $\operatorname{sen}(2013\pi) + \cos(2012\pi)$ es igual a

(A) 1

(B) 2

(C) 0

(D) -1

24. Considere la función $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = senx$ y analice las siguientes proposiciones

I) La grafica de f intersecan al eje x cinco veces

II) f es decreciente en $\left]\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right[$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

25. El periodo de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ sen\left(\frac{x}{2}+\pi\right)$ corresponde a

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) 4π

(C) 2π

(D) π

26. La expresión $sen\left(2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ es igual a

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{-1}{2}$

27. La expresión $\text{arcsen}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ es igual a

(A) $\frac{2\pi}{3}$

(B) $\frac{-\pi}{3}$

(C) $\frac{5\pi}{6}$

(D) $\frac{-\pi}{6}$

28. El valor de $\cos 2(arctan\ 1)$ es

(A) 1

(B) 0

(C) -1

(D) $\frac{\pi}{2}$

29. La expresión $\frac{\sec x}{senx} - \tan x$ es igual a

(A) $\tan x$

(B) $\cot x$

(C) $\sec x$

(D) $\cos x$

30. La expresión $\cos^4 x - sen^4 x$ es igual a

(A) $\cos(2x)$

(B) $sen(2x)$

(C) $\sec(2x)$

(D) $\csc(2x)$

31. Para cualquier número real β, con CERTEZA, se cumple que

(A) $sen(\pi - \beta) = -sen\beta$

(B) $\cos(\pi - \beta) = \cos\beta$

(C) $\sec(\pi - \beta) = -\sec\beta$

(D) $\csc(\pi - \beta) = -\csc\beta$

32. La expresión $\cot x + \frac{senx}{1+\cos x}$ es equivalente a

(A) $\sec x$

(B) $senx$

(C) $\csc x$

(D) $\tan x$

33. La expresión $\frac{1+\sec x}{1-\sec x}$ es equivalente a

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{\cos x+1}{\cos x-1}$

(D) $\frac{senx+1}{senx-1}$

34. Una solución de $2\sqrt{3}+\cos x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ es

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{5\pi}{6}$

(C) $\frac{5\pi}{3}$

(D) $\frac{11\pi}{6}$

35. En $\mathbb{R}$, el conjunto solución de la ecuación $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ es

(A) $\varnothing$

(B) $\mathbb{R}$

(C) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad con \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

(D) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = -2 + 2k\pi \quad con \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

36. El conjunto solución de $\sec x = \dfrac{2}{\cot x}$ en $\left[0, 2\pi\right[$ es

(A) $\left\{ \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3} \right\}$

(B) $\left\{ \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6} \right\}$

(C) $\left\{ \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3} \right\}$

(D) $\left\{ \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6} \right\}$

Fin de la primera parte

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

TERCER EXAMEN PARCIAL 2012 - Sábado 13 de octubre

Nombre completo: ________________________________ CÓDIGO: __________

COLEGIO: ____

PREGUNTA	Puntos obtenidos
Desarrollo 1	
Desarrollo 2	
Desarrollo 3	

<u>SEGUNDA PARTE. DESARROLLO</u> **(Valor 18 puntos)**

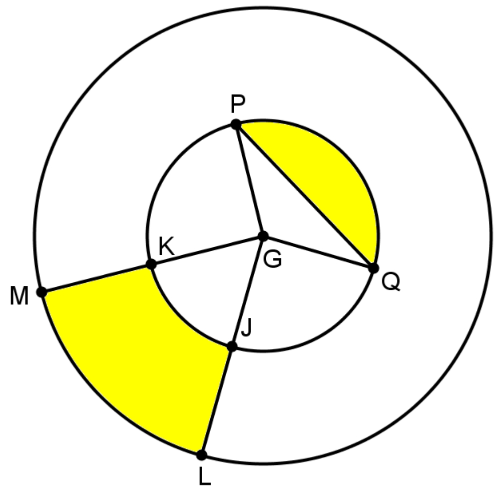
Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (7 puntos) Trace la gráfica de la siguiente función: $f:\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=-2\cos(2x-\pi)$. Para ello debe determinar el periodo, la imagen de los extremos del dominio y las intersecciones con los ejes.

2. (5 puntos) Determine, en $\mathbb{R}$, el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\cos^2 x - sen^2 x - 7senx = -4sen^2 x - 2$$

3. (6 puntos) En la figura, G es el centro de ambas circunferencias. Si K es el punto medio del segmento $\overline{GM}$, GQ = 6 cm, $m\angle PGQ = 120°$ y $m\angle MGL = 60°$, calcule el área de la región sombreada.



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

SOLUCIONARIO

PRIMER EXAMEN PARCIAL 2012 - Sábado 13 de octubre

Desarrollo

1. (7 puntos) Trace la gráfica de la siguiente función:

$f:\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=-2\cos(2x-\pi)$. Para ello debe determinar el periodo, la imagen de los extremos del dominio y las intersecciones con los ejes.

Solución:

- Corte con el eje *y*:

$$f(0)=-2\cos(2\cdot 0-\pi)=-2\cos(-\pi)=2$$

Entonces, la gráfica de f corta al eje *y* en $(0,2)$

- Cortes con el eje *x*:

$$f(x)=0\Leftrightarrow -2\cos(2x-\pi)$$

$$\Leftrightarrow -2\cos(2x-\pi)=0$$

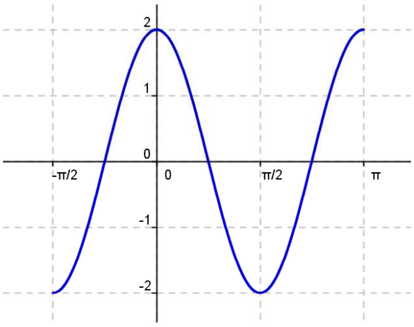
$$\Leftrightarrow 2x-\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ o } 2x-\pi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \text{ o } 2x=\frac{5\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi \text{ o } x=\frac{5\pi}{4}+k\pi$$

k	$x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$	$x=\frac{5\pi}{4}+k\pi$
-2	$x=\frac{-5\pi}{4}\notin\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$	$x=\frac{-3\pi}{4}\notin\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$
-1	$x=\frac{-\pi}{4}$	$x=\frac{\pi}{4}$
0	$x=\frac{3\pi}{4}$	$x=\frac{-5\pi}{4}\notin\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$
2	$x=\frac{11\pi}{4}\notin\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$	$x=\frac{13\pi}{4}\notin\left[\frac{-\pi}{2},\pi\right]$

Entonces, la gráfica de f corta al eje x en: $\left(\frac{-\pi}{4},0\right),\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$.



2. (5 puntos) Determine, en $\mathbb{R}$, el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\cos^2 x - sen^2 x - 7senx = -4sen^2 x - 2$$

Solución:

$\cos^2 x - sen^2 x - 7senx = -4sen^2 x - 2$

$\Rightarrow \left(1 - sen^2 x\right) - sen^2 x - 7senx = -4sen^2 x - 2$

$\Rightarrow 1 - sen^2 x - sen^2 x - 7senx + 4sen^2 x + 2 = 0$

$\Rightarrow 2sen^2 x - 7senx + 3 = 0$

$\Rightarrow \left(senx - 3\right)\left(2senx - 1\right) = 0$

$\Rightarrow \left(3senx + 1\right) = 0$ o $\left(2senx - 1\right) = 0$

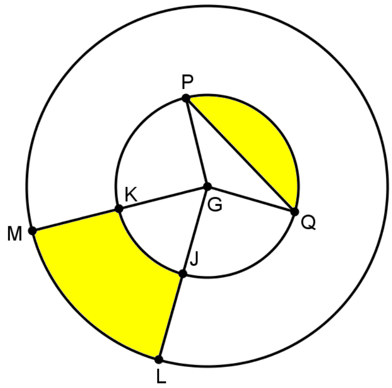
$\Rightarrow senx = 3$ o $senx = \frac{1}{2}$

Ahora:

- $senx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
- $senx = 3$ no tiene solución, dado que el ámbito de la función seno es $\left[-1,1\right]$

Finalmente: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$

3. (6 puntos) En la figura, G es el centro de ambas circunferencias. Si K es el punto medio del segmento $\overline{GM}$, GQ = 6 cm, $m\angle PGQ$ = 120° y $m\angle MGL$ = 60°, calcule el área de la región sombreada.



Solución:

a. Se calcula el área del trapecio circular:

- Área del trapecio circular $MKJL$ = área del sector MGL - área del sector KGJ
- Área del trapecio circular $MKJL$ = $\dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ}$ - $\dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ}$
- Área del trapecio circular $MKJL$ = $24\pi - 6\pi = 18\pi$

b. Se calcula el área del segmento circular:

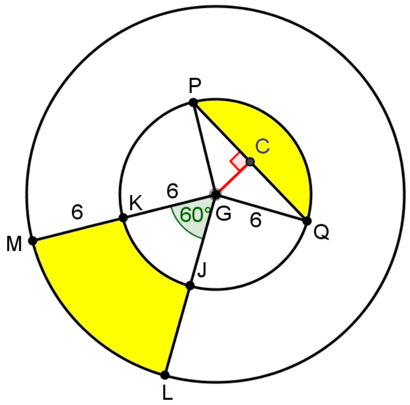
- Como $m\sphericalangle PGQ = 120^\circ$ se tiene que $m\sphericalangle CGQ = 60^\circ$, entonces el ΔPGQ es rectángulo 30º-60º, en consecuencia, $CG = 3$ y $CQ = 3\sqrt{3}$.
- Área del $\Delta GPQ = \dfrac{PQ \cdot GC}{2} = \dfrac{3 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$
- Área del sector $PGQ = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 12\pi$
- Área del segmento circular PGQ = área del sector PGQ - área del ΔGPQ

  Área del segmento circular PGQ = $12\pi - 9\sqrt{3}$

c. Área de la región sombreada:

A_s = área del trapecio circular $MKJL$ + área del segmento circular PGQ

$A_s = 18\pi + 12\pi - 9\sqrt{3} = 30\pi - 9\sqrt{3}$



<u>SELECCIÓN ÚNICA</u>

1	C		8	B		15	A		22	D		29	B		36	B
2	A		9	C		16	B		23	A		30	A			
3	B		10	C		17	A		24	C		31	C			
4	D		11	C		18	C		25	B		32	C			
5	B		12	D		19	C		26	A		33	C			
6	B		13	B		20	A		27	B		34	D			
7	D		14	C		21	C		28	B		35	C			