



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

PROYECTO MATEM

Matemática en la Enseñanza Media

Undécimo año

III EXAMEN PARCIAL

2009

FÓRMULA 0

NOMBRE: _____

17 de Octubre, 2009

Sábado 17 de octubre del 2009

Tercer Examen Parcial

Tiempo Probable: 3 horas

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL NIVEL: UNDÉCIMO AÑO

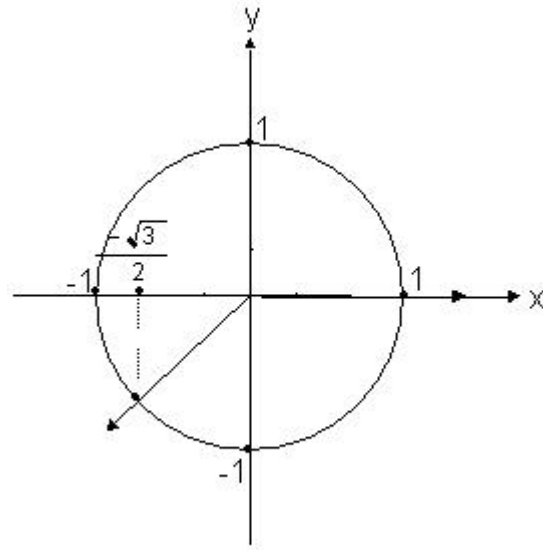
INSTRUCCIONES

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
- Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección y está constituida por 30 ítems; y la segunda es de desarrollo y la conforman 4 ítems.
- El examen debe ser contestado en las hojas de respuestas que se le darán para tal efecto.
- En cada una de las hojas de respuesta debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
- **En los ítems de selección utilice la hoja de respuestas**, usted debe **rellenar con lápiz la celda** que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, solo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.
- **En los ítems de desarrollo, debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos.
- Utilice únicamente bolígrafo azul o negro. Si el **examen contiene** partes escritas con **lápiz** usted **pierde el derecho a reclamar**.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.
- Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
- **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. DE SELECCIÓN UNICA. (VALOR 30 PUNTOS)

1) De acuerdo con los datos de la figura, al número real α le corresponde un punto del tercer cuadrante en la circunferencia trigonométrica, en el cual la abscisa es $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, el valor de $-\tan(\alpha)$ es el número

- a. $-\sqrt{3}$
- b. $\frac{-1}{\sqrt{3}}$
- c. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- d. $\sqrt{3}$



2) El período de la función definida en su dominio máximo por $h(x) = 6 \tan\left(\frac{x}{4} - 2\pi\right)$ es

- a. 2π
- b. $\frac{\pi}{2}$
- c. 4π
- d. 3π

3) Considere la función $f(x) = \text{sen}x$ definida en el intervalo $]0, \pi[$, entonces se puede asegurar con certeza que

- a. $f\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) > f\left(2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
- b. $f\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) < f\left(2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
- c. $f\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = f\left(2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
- d. $f\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = f\left(2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

4) El ámbito de la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{-3\cos(2x+\pi)}{2}$ es

- a. \mathbb{R}
- b. $[-1, 1]$
- c. $[-3, 3]$
- d. $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

5) Si x es un número real tal que $-1 < \text{sen}(x) < 0$ y $0 < \cos(x) < 1$ entonces se puede asegurar que un número positivo es

- a. $\sec(x)$
- b. $\csc(x)$
- c. $\cot(x)$
- d. $\tan(x)$

6) Considere las siguientes igualdades:

I. $\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

II. $-\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

III. $\text{sen}\left(\frac{15\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

De ellas, son verdaderas

- a. Solamente I y II
- b. Solamente I y III
- c. Solamente II y III
- d. Todas

7) Considere los siguientes números reales:

$$x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad y = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad z = \sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad w = \cot\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

El mayor de estos números es

- a. x
- b. y
- c. z
- d. w

8) Sea $P(a, -2a)$ el punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real t . Si $\cos(t) < 0$ entonces el valor de a es

- a. $\frac{1}{5}$
- b. $-\frac{1}{5}$
- c. $\sqrt{\frac{1}{5}}$
- d. $-\sqrt{\frac{1}{5}}$

9) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -\cos(x)$. Un intervalo en el cual f es estrictamente creciente es

- a. $] -\pi, \pi [$
- b. $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$
- c. $] -\pi, 0 [$
- d. $] 0, \pi [$

10) La expresión $(\text{sen}(\pi - x))(\text{cos}(x - \pi))$ es equivalente a

- a. $\text{sen}(x) - \text{cos}(x)$
- b. $-\text{sen}(x)\text{cos}(x)$
- c. $\text{sen}^2(x) - \text{cos}^2(x)$
- d. $2\text{sen}(x)\text{cos}(x)$

11) El conjunto solución de la ecuación $\text{sen}(x) - \cos(x) = 0$ es

- a. $\{\}$
- b. $\left\{\frac{k\pi}{4} / k \in \mathbb{Z}\right\}$
- c. $\left\{\frac{k\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
- d. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

12) El conjunto solución de la ecuación $\cos(4x) - \text{sen}(x)\cos(4x) = 0$ es

- a. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
- b. $\left\{\frac{\pi}{8} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
- c. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4} / m \in \mathbb{Z}\right\}$
- d. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2m\pi / m \in \mathbb{Z}\right\}$

13) El conjunto solución de la ecuación $\cos(x) + \text{sen}(x) = 5$ es

- a. $\{\}$
- b. \mathbb{R}
- c. $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
- d. $\left\{\frac{\pi}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

14) Si $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que el conjunto solución de $T(x)=0$ es $\left\{ \frac{3\pi}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ entonces un punto de intersección de la gráfica de T con el eje x es

a. $\left(\frac{-3\pi}{5}, 0 \right)$

b. $\left(\frac{23\pi}{5}, 0 \right)$

c. $\left(\frac{8\pi}{5}, 0 \right)$

d. $\left(\frac{7\pi}{5}, 0 \right)$

15) El valor numérico de $\arctan(-1)$

a. $\frac{\pi}{4}$

b. $-\frac{\pi}{4}$

c. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16) El valor numérico de $\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ es

a. $\frac{\pi}{6}$

b. $-\frac{\pi}{6}$

c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

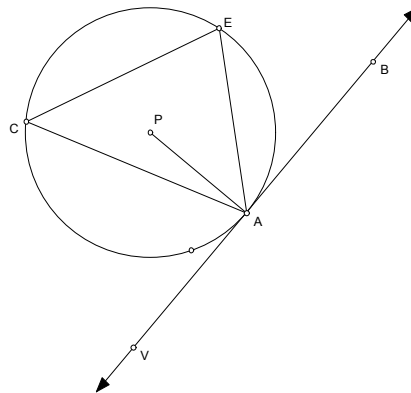
d. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

17) El conjunto solución de la desigualdad $|\cos(\alpha)| \leq 1$ es

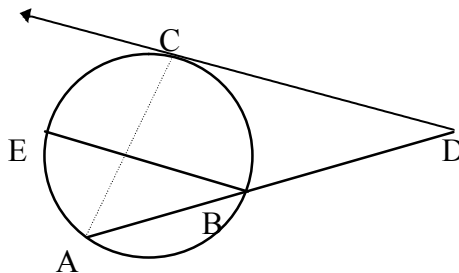
- a. \emptyset
- b. \mathbb{R}
- c. $[0, \pi[$
- d. $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

18) De acuerdo con los datos de la figura adjunta, en la cual el arco menor \widehat{AE} mide 130° y $\overline{AE} = \overline{CE}$, además el $\sphericalangle CAV$ mide

- a. 25°
- b. 50°
- c. 100°
- d. 130°



19) Si en la figura adjunta el arco menor \widehat{CB} mide $2x$, el arco menor \widehat{AB} mide $x + 20^\circ$, $m\widehat{EC} = 50^\circ$ y la medida del ángulo $\sphericalangle CDB$ es 40° entonces el arco \widehat{AB} mide



- a. 52°
- b. 50°
- c. 70°
- d. 72°

20) Considere dos circunferencias concéntricas que determinan una corona circular de $2a$ cm de ancho y $8a^2$ cm² de área. El radio de la circunferencia menor es

- a. a cm
- b. $\frac{a}{2}$ cm
- c. $\frac{2}{a}$ cm
- d. $2a$ cm

21) El perímetro de un polígono regular de tres lados cuyo radio mide $10b^2$ cm es

- a. $30b^2\sqrt{3}$ cm
- b. $40b^2\sqrt{3}$ cm
- c. $30b\sqrt{2}$ cm
- d. $60b\sqrt{3}$ cm

22) Si un polígono convexo de n lados tiene 44 diagonales y los ángulos internos de otro polígono convexo de m lados suman 1800° , entonces se puede garantizar que

- a. $m = n$
- b. $m = 2n$
- c. $m > n$
- d. $m < n$

23) La base mayor de un trapezio mide 12 cm . Si la altura y la base menor son iguales y su área es $22,5 \text{ cm}^2$ entonces su altura es

- a. 3 cm
- b. 6 cm
- c. 15 cm
- d. 30 cm

24) El volumen de un cono es igual a $196\pi \text{ cm}^3$ y su altura es 12 cm , entonces el radio de la base de este cono mide

- a. $4,04 \text{ cm}$
- b. 7 cm
- c. $24,5 \text{ cm}$
- d. 49 cm

25) Si el volumen de una esfera es 8 cm^3 y el volumen de un cubo también es 8 cm^3 , entonces se puede afirmar con certeza que

- a. el radio de la esfera es igual al radio del cubo
- b. el radio de la esfera es mayor que el radio del cubo
- c. el radio de la esfera es menor que el radio del cubo
- d. el radio de la esfera es el doble que el del cubo

26) El volumen de un cilindro circular recto es 54π cm y la medida de la altura es 6 cm. Si el radio de la base se duplica y se mantiene la misma altura, entonces el volumen del cilindro resultante es

- a. 57π cm³
- b. 162π cm³
- c. 216π cm³
- d. 486π cm³

27) Si una cara lateral de una pirámide recta de base cuadrada tiene un área de 24 cm² y cada lado de la base mide 4 cm entonces el volumen de la pirámide es

- a. 64 cm³
- b. $\frac{16\sqrt{35}}{3}$ cm³
- c. $\frac{32\sqrt{35}}{3}$ cm³
- d. $32\sqrt{35}$ cm³

28) Si un cilindro circular recto cuya altura es h , tiene πh cm³ de volumen, y además el área total de este sólido es 4π cm², entonces necesariamente la medida de la altura es

- a. 1 cm
- b. 4 cm
- c. $\frac{1}{4}$ cm
- d. $\frac{4}{\pi}$ cm

29) En un recipiente con forma de cilindro circular recto cuya profundidad es 12 dm, se tiene que $150\pi \text{ dm}^3$ de líquido ocupan la mitad de su capacidad. Por lo tanto el material utilizado en la construcción de este recipiente sin tapa fue

- a. $25\pi \text{ dm}^2$
- b. $50\pi \text{ dm}^2$
- c. $109,85\pi \text{ dm}^2$
- d. $145 \pi \text{ dm}^2$

30) Si el área de una esfera es $576\pi \text{ cm}^2$ entonces su volumen, en cm^3 , es

- a. 192π
- b. $718,12\pi$
- c. 256π
- d. 2304π

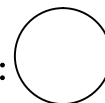
SEGUNDA PARTE. DESARROLLO. (VALOR 20 PUNTOS)

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

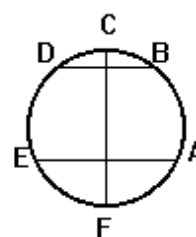
CÓDIGO: _____

COLEGIO: _____

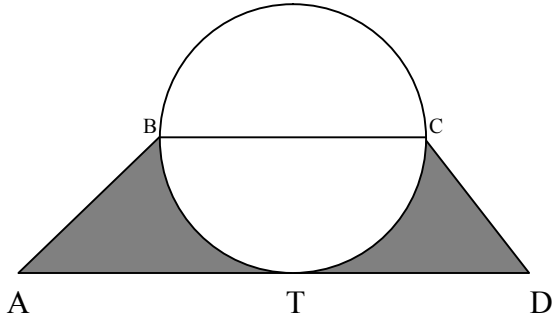
Total de puntos de desarrollo:



1. En la circunferencia de la figura adjunta se tiene que \overline{CF} es diámetro perpendicular a \overline{DB} y \overline{EA} ; además $m\widehat{AB} = 70^\circ$ y $m\widehat{CB} = 45^\circ$. Determine la medida angular de los arcos \widehat{CD} , \widehat{DF} , \widehat{EF} , \widehat{AF} . **Justifique.**
(Valor 4 puntos)



2. Calcule el área exacta de la región señalada con color gris (región sombreada) en la figura adjunta, en la cual el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio. La base menor \overline{BC} mide 8cm y contiene al centro de la circunferencia. La base mayor \overline{AD} es tangente a la circunferencia en el punto T , el cual está en el segmento \overline{AD} . Además el ángulo $\sphericalangle BAT$ mide 30° y el ángulo $\sphericalangle CDT$ mide 45° . (Valor 6 puntos)



3. Encuentre el conjunto de todos los números reales que son solución de la siguiente ecuación trigonométrica: (Valor 5 puntos)

$$-2\cos^2(x) - 5\operatorname{sen}(x) - 1 = 0$$

4) Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

(Valor 5 puntos)

$$\frac{[\tan(x) - \operatorname{sen}(x)][\cos(x)\sec(x)]}{\operatorname{sen}^3(x)} = \frac{\sec(x)}{1 + \cos(x)} \quad \text{para } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$