PRIMER EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

22 de abril de 2017

INSTRUCCIONES GENERALES:

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de dos partes: Selección única y Desarrollo, para un total de 61 puntos**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas**.

I Parte. Selección única. Marque una equis (X) sobre la letra que antecede a la única respuesta correcta. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva elección en su cuaderno de examen.** (5 puntos, un punto cada respuesta correcta)

1. Considere las siguientes proposiciones:

I. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{1-x} = 0$.

II. $\lim\limits_{x \to 1} |x-1| = 0$.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

(A) Ambas
(B) Ninguna
(C) Solamente I
(D) Solamente II

2. Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, donde $a, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Con base en la información, considere las siguientes proposiciones:

I. $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2.$

II. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L_1{}^n, con\ n \in \mathbb{N}.$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

(A) Ambas
(B) Ninguna
(C) Solamente I
(D) Solamente II

3. Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, donde $a, L_1 \in \mathbb{R}$. Con base en la información, considere las siguientes proposiciones:

I. $\lim_{x \to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ no existe.

II. $\lim_{x \to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = 0$.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

(A) Ambas
(B) Ninguna
(C) Solamente I
(D) Solamente II

4. Si $\lim_{x\to 2}\left[\dfrac{2f(x)-5}{x+3}\right]=4$, con base en la información, considere las siguientes afirmaciones:

I. $\lim_{x\to 2} f(x)=\dfrac{25}{2}$.

II. $f(2)=\dfrac{25}{2}$.

De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

(A) Ambas
(B) Ninguna
(C) Solamente I
(D) Solamente II

5. Considere las siguientes proposiciones:

I. Si f es una función polinomial, entonces $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

II. Si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces $\lim_{x\to 1}\left[f(x)-g(x)\right]=0$.

De ellas con certeza, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

(A) Ambas
(B) Ninguna
(C) Solamente I
(D) Solamente II

II Parte. Desarrollo. Debe escribir todo los procedimientos, en su cuaderno de examen, que justifiquen cada una de sus respuestas.

1) Calcule los siguientes límites:

(a) *[5 puntos]* $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{x^3-3x^2-5x+4}$.

(b) *[9 puntos]* $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{1-2\cos(x)}$.

2) Considere la función h definida en su máximo dominio, tal que

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{5-x^4}{x} & \text{si} \quad x<0\\ x-\sqrt{x^2+1} & \text{si} \quad x>0\end{cases}.$$

(a) *[3 puntos]* Determine si la gráfica de h posee asíntotas verticales.

(b) *[9 puntos]* Determine si la gráfica de h posee asíntotas horizontales.

3) Sea la función $f:\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donde $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ no existe.

Considere la función h definida en su máximo dominio, tal que

$$h(x)=\begin{cases}x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

(a) *[8 puntos]* Demuestre que h es continua en $x=0$.

(b) *[3 puntos]* Utilice la definición de derivada puntual para demostrar que h no es derivable en $x=0$.

4) Calcule y' para cada función dada, no es necesario simplificar:

(a) *[6 puntos]* $y = x\sqrt{2x+1}\cos(e^x)$.

(b) *[4 puntos]* $y = \csc^2\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$.

5) *[9 puntos]* Las curvas $y = x^2 + ax + b$ y $y = -x^2 + cx$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, tienen una recta tangente en común en el punto $(1, 0)$. Con base en la información determine los valores de a , b y c .

SOLUCIONARIO

PRIMER EXAMEN PARCIAL 2017 - Sábado 22 de abril

I Parte. Selección única.

1. D	**2.** A	**3.** A	**4.** C	**5.** B

II Parte. Desarrollo.

1) (a) *[5 puntos]* $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{x^3-3x^2-5x+4}$.

Solución: Al sustituir $x=4$, se tiene $\frac{3-\sqrt{9}}{0}=\frac{0}{0}$, obteniendo una forma indeterminada.

Al racionalizar se obtiene,

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{x^3-3x^2-5x+4}\cdot\frac{3-\sqrt{5+x}}{3-\sqrt{5+x}}$$

$$=\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{(x-4)(x^2+x-1)}\cdot\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

$$=\lim_{x\to 4} \frac{9-(5+x)}{(x-4)(x^2+x-1)(3+\sqrt{5+x})}$$

$$=\lim_{x\to 4} \frac{4-x}{(x-4)(x^2+x-1)(3+\sqrt{5+x})}$$

$$=\lim_{x\to 4} \frac{-\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x^2+x-1)(3+\sqrt{5+x})}$$

$$=\frac{-\cancel{1}}{19\cdot 6}$$

$$=\frac{-1}{114}$$

1) (b) *[9 puntos]* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{sen\,(3x)}{1-2\cdot\cos(x)}$.

<u>Solución</u>:

Al sustituir $x = \frac{\pi}{3}$, se tiene $\frac{sen\,(0)}{1-2\cdot\cos(0)} = \frac{0}{0}$, forma indeterminada.

- Usar un cambio de variable:

$m = x - \frac{\pi}{3}$, luego cuando $x \to \frac{\pi}{3}, m \to 0$

- Al hacer el cambio de variable se tiene:

$$\lim_{m\to 0} \frac{sen\,(3m+\pi)}{1-2\cdot\cos\left(m+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \lim_{m\to 0} \frac{-sen\,(3m)}{1-2\cdot\left[\cos(m)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-sen(m)sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

$$= \lim_{m\to 0} \frac{-sen\,(3m)}{1-\cos(m)+\sqrt{3}\,sen(m)}$$

$$= \lim_{m\to 0} \frac{-sen\,(3m)}{1-\cos(m)+\sqrt{3}sen(m)} \cdot \frac{3m}{3m}$$

$$= \lim_{m\to 0} \frac{\frac{-sen\,(3m)}{3m}\cdot 3}{\frac{1-\cos(m)}{m}+\frac{\sqrt{3}sen(m)}{m}}$$

$$= \frac{-\,3}{0+\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

2) (a) *[3 puntos]* Determine si la gráfica de h posee asíntotas verticales.

<u>Solución</u>: Para ello, calculemos el límite cuando $x \to 0^-$.

Note que cuando $x \to 0^-, h(x) \to \frac{1}{0} - \frac{5}{0}$, veamos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} - \frac{5-x^4}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1-5x^2+x^6}{x^3}$$

$$= -\infty$$

Por lo tanto, en $x = 0$ la función h posee una asíntota vertical.

2) (b) *[9 puntos]* Determine si la gráfica de h posee asíntotas horizontales.

Solución: Para ello calculamos los límites cuando $x \to \pm\infty$:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-5x^2+x^6}{x^3}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^6\left(\frac{1}{x^6}-\frac{5}{x^4}+1\right)}{x^3}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(\frac{1}{x^6}-\frac{5}{x^4}+1\right)$

$= -\infty$

- El $\lim\limits_{x \to +\infty} x-\sqrt{x^2+1}$ tiene forma indeterminada $\infty - \infty$.

Al racionalizar se obtiene,

$\lim\limits_{x \to +\infty} x-\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$= 0$

Por lo tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la curva definida por h.

3) (a) *[8 puntos]* Demuestre que h es continua en $x = 0$.

Solución: La función es continua cuando en un punto si cumple:

i. Si $h(0)$ está definida, así que al evaluar se obtiene $h(0) = 0$.
ii. Existencia del límite $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$, para ello note que

$-1 \leq sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$\Rightarrow -x \leq xsen\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

Luego, al calcular el límite de los extremos se obtiene:

$\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

Y por el teorema de intercalación se deduce que

$$\lim_{x\to 0} \quad xsen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

iii. $\lim_{x\to 0} \quad h(x) = h(0) = 0$

Por lo tanto, la función h es continua en $x = 0$.

3) (b) *[3 puntos]* Utilice la definición de derivada puntual para demostrar que h no es derivable en $x=0$.

Solución: La función h es derivable en $x = 0$ si existe el límite, observemos

- $\lim_{x\to 0} \frac{xsen\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{xsen\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \; sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

El cual no existe

Por lo tanto, la función h no es derivable en $x = 0$.

4) (a) *[6 puntos]* $y = x\sqrt{2x+1}\cos(e^x)$.

Solución: Se calcula y' aplicando la Regla de la Cadena:

$$y' = \left(x\sqrt{2x+1}\right)' \cos(e^x) + \; x\sqrt{2x+1}\,[\cos(e^x)\,]'$$

$$= \left(1\sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2\right)' \cos(e^x) + \; x\sqrt{2x+1}\,[\cos(e^x)\,]'$$

$$= \left(1\sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2\right)' \cos(e^x) + \; x\sqrt{2x+1} \; \cdot -sen\,(e^x) \cdot e^x$$

4) (b) *[4 puntos]* $y = csc^2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$.

Solución: Al calcular y' se obtiene:

$$y' = \left[csc^2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]'$$

$$= 2csc\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\left[csc\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]'$$

$$= 2csc\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\cdot -ctg\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\cdot csc\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'$$

$$= 2csc\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\cdot -ctg\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\cdot csc\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\cdot\left[\frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x+1)}{(x+2)^2}\right]$$

Nota: Cuando se deriva $csc(x)$ también puede obtenerse $-\frac{\cos(x)}{sen^2(x)}$.

5) *[9 puntos]* Las curvas $y = x^2 + ax + b$ y $y = -x^2 + cx$ tienen una recta tangente en común en el punto $(1,0)$. Con base en la información determine los valores de a, b y c.

Solución:

- Dado que las curvas dadas tienen una recta tangente en común en un punto dado se cumple que:
  $0 = 1 + a + b$ y $0 = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$

- Para determinar el valor de las otras contantes determinar y' y evaluar en el punto de tangencia

  $y' = 2x + a, \quad y'|_{(1,0)} = 2 + a$

  $y' = -2x + c, \quad y'|_{(1,0)} = -2 + c$

  Luego, dado que tienen un punto en común
  $2 + a = -2 + c, con\ c = 1$

  $\Rightarrow 2 + a = -2 + 1$
  $\Rightarrow a = -3$

  Ahora si $a = -3 \Rightarrow 0 = 1 - 3 + b \Rightarrow b = 2$

  Por lo tanto, los valores numéricos para las contantes son $c = 1, a = -3, b = 2$.

- Representación gráfica de las curvas: