

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

17 de junio de 2017

INSTRUCCIONES GENERALES:

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado, éste no se calificará.**
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de tres partes: Complete, Respuesta Breve y Desarrollo, para un total de 64 puntos.**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas.**

I Parte. Complete. Escriba en el espacio correspondiente el o los objetos matemáticos (ecuación, conjunto, valor, etc.) que completan correctamente cada oración. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** (6 puntos, un punto cada respuesta correcta).

Para los ítems del 1 al 6, utilice como referencia la gráfica de la figura 1 correspondiente a la función f .

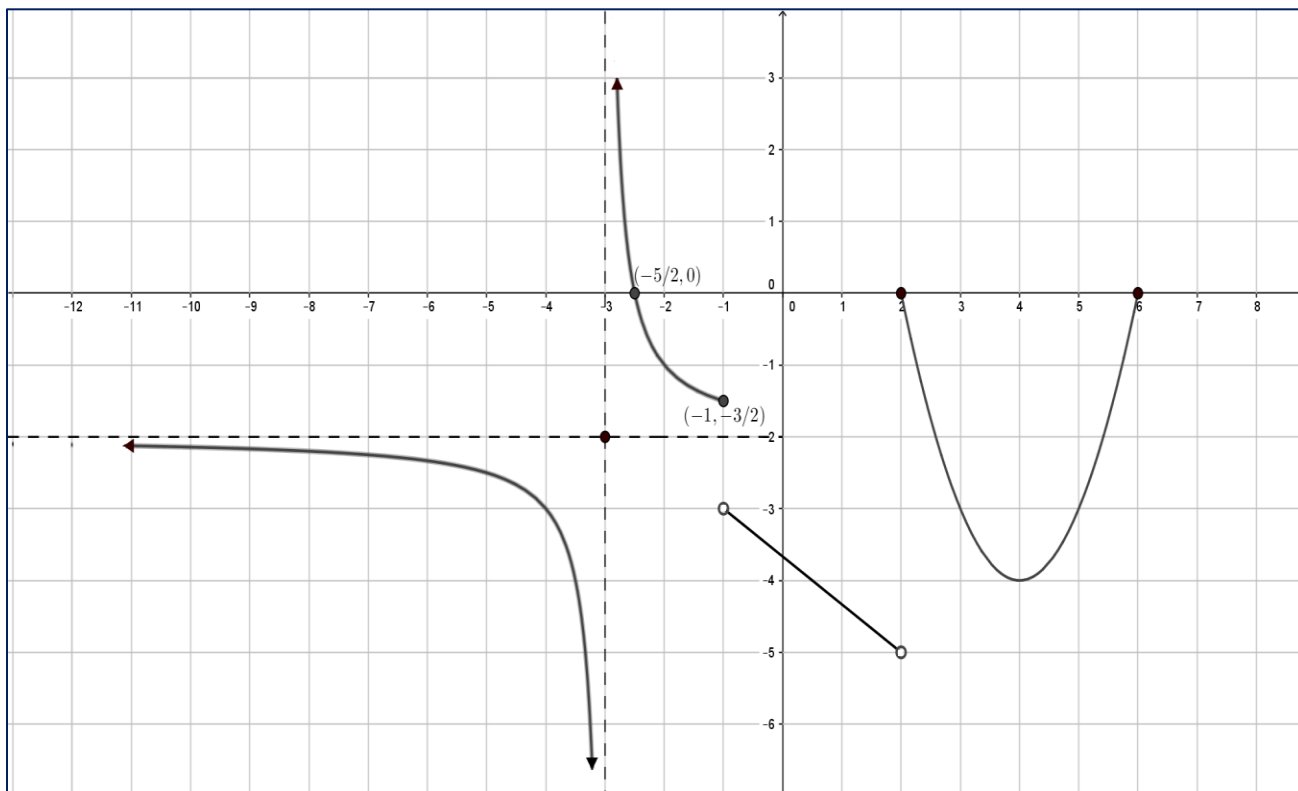


Figura 1.

- 1) La ecuación de la asíntota horizontal corresponde a
- 2) Un intervalo donde $f'(x) < 0$ corresponde a
- 3) El (o los) conjunto (s) donde $f''(x) < 0$ corresponde (n) a
- 4) El valor numérico donde f alcanza un mínimo relativo corresponde a
- 5) Un intervalo $[a, b]$ en el que se cumple el Teorema del Valor Medio, y además, con certeza se tiene $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -1$, corresponde a
- 6) Un intervalo I en el que con certeza $f'(x) = k, k \in \mathbb{R}, \forall x \in I$ corresponde a

II Parte. Respuesta Breve. Para cada uno de las siguientes figuras, de acuerdo con cada gráfica de una función f , indique si se cumple o no el Teorema de Rolle en el intervalo I dado, de no cumplirse, describa la hipótesis (condición) que no se cumple. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** (3 puntos)

1) $I = [-1,1]$

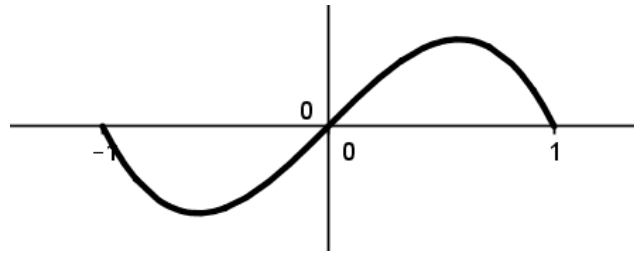


Figura 2.

2) $I = [-1,1]$

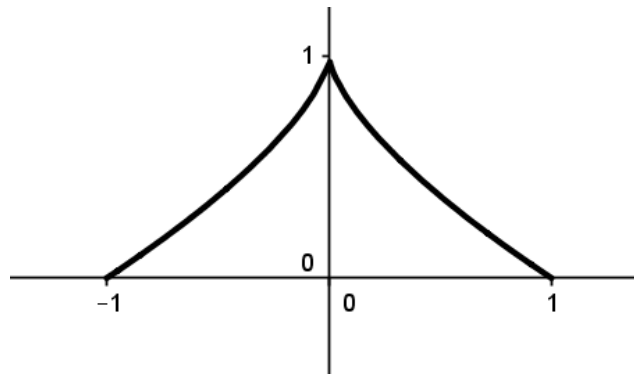


Figura 3.

III Parte. Desarrollo. Debe escribir todo los procedimientos, en su cuaderno de examen, que justifiquen cada una de sus respuestas.

- 1) En la figura 4, se presenta la gráfica de la curva con ecuación $x^2 - y^2 = 3$.

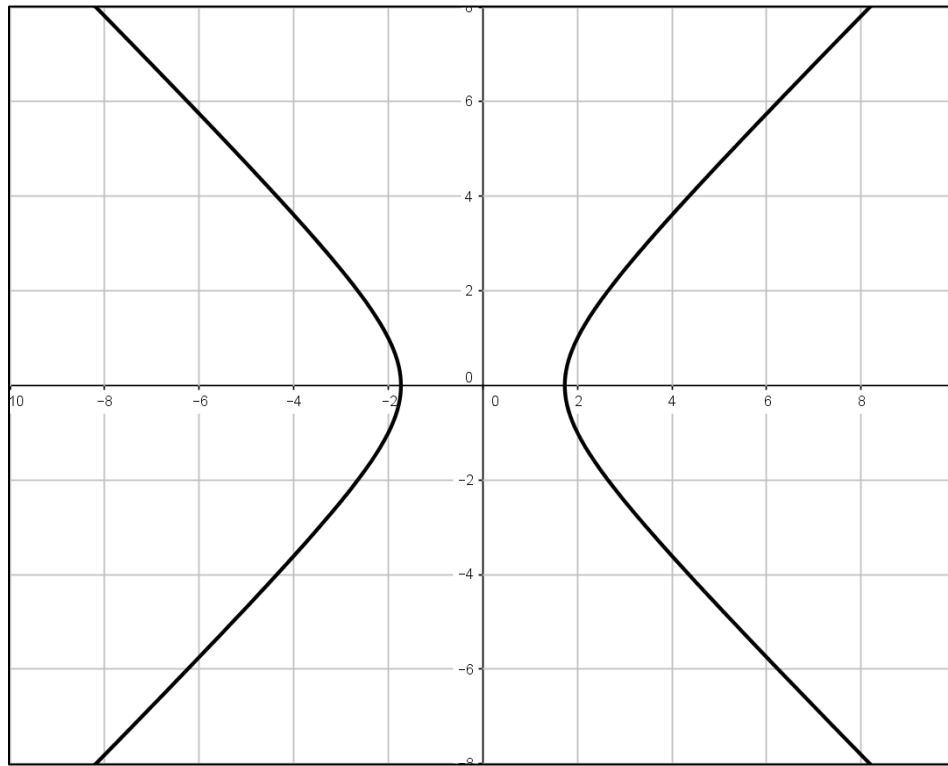


Figura 4

Con base en la información:

- a) (5 puntos) Demuestre que las rectas tangentes a la curva en $(-2,1)$ y $(2,1)$ se intersecan.
- b) (4 puntos) Determine los puntos de la curva en los que la recta tangente es paralela a la recta definida por $y = 2x$.
- 2) (4 puntos) Sea f una función polinomial definida en su máximo dominio, tal que $f(x) = -x^3 + kx^2 + 5x - 2$. Determine el valor de k para que f posea un punto de inflexión en $x = 2$.
- 3) Determine en cada caso y' , no es necesario simplificar.
- a) (7 puntos) $y = [\log_3(2x)]^{\tan^{-1}\sqrt{x}}$
- b) (4 puntos) $y = \arcsen(e^x + x) - 5^{\sec(x)}$

4) Calcule los siguientes límites:

a) (6 puntos) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+\operatorname{sen}(x))-x}{x^2} \right]$.

b) (7 puntos) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln^2(x)]^x$.

5) Resuelva los siguientes problemas:

a) (7 puntos) Hallar dos números positivos cuya suma es 30 tal que el cuadrado de uno por el cubo del otro sea máximo.

b) (5 puntos) Determine la velocidad a la que baja el nivel de un fluido contenido en un tanque cilíndrico, sabiendo que se bombea hacia afuera el fluido a razón de 3000 litros por minuto. Recuerde que $1m^3$ posee 1000 l.

6) (6 puntos) Trace la gráfica de la función f que satisface todas las condiciones dadas a continuación:

a)

	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	
$f''(x)$	+	-	-	

b) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

SOLUCIONARIO SEGUNDO EXAMEN PARCIAL CÁLCULO

17 de junio de 2017

I Parte. Complete. Escriba en el espacio correspondiente el o los objetos matemáticos (ecuación, conjunto, valor, etc.) que completan correctamente cada oración. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** (6 puntos, un punto cada respuesta correcta).

Para los ítems del 1 al 6, utilice como referencia la gráfica de la figura 1 correspondiente a una función f .

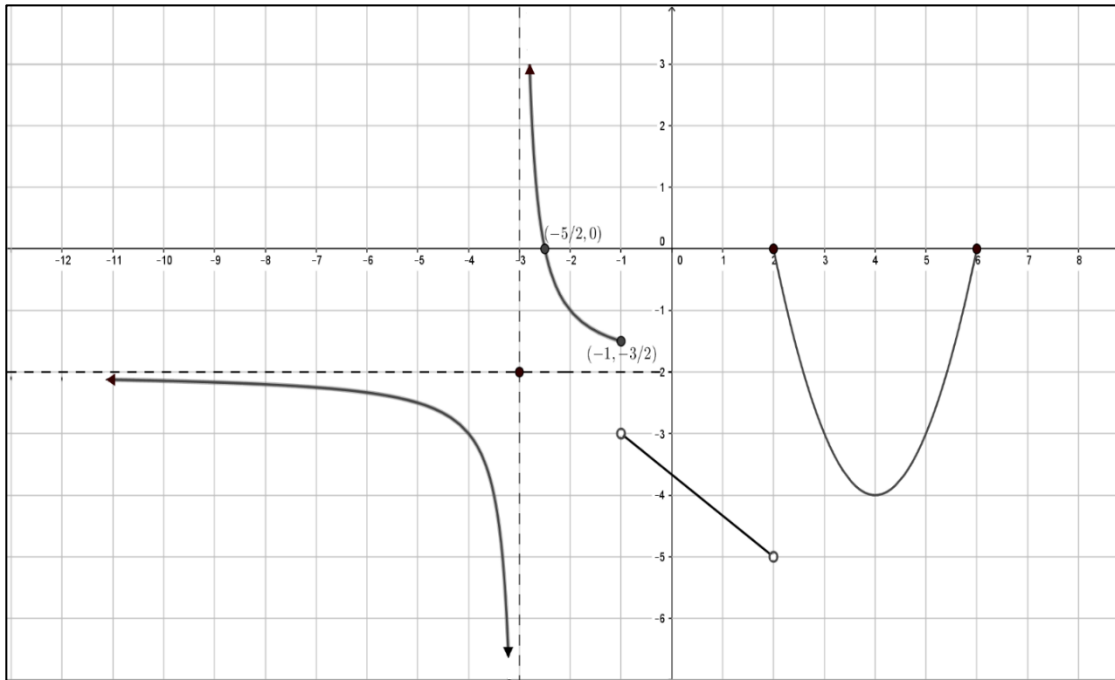


Figura 1.

- 1) La ecuación de la asíntota horizontal corresponde a $y = -2$.
- 2) Un intervalo donde $f'(x) < 0$ corresponde a $]-\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 2[$ o $[2, 4[$.
- 3) El (o los) conjunto(s) donde $f''(x) < 0$ corresponde(n) a $]-\infty, -3[$.
- 4) El valor numérico donde f alcanza un mínimo relativo corresponde a $x = 4$.
- 5) Un intervalo $[a, b]$ en el que se cumple el Teorema del Valor Medio, y además, con certeza se tiene $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -1$, corresponde a $\left[\frac{-5}{2}, -1\right]$ o $[3, 4]$.
- 6) Un intervalo I en el que con certeza $f'(x) = k$, $k \in \mathbb{R}, \forall x \in I$ corresponde a $]-1, 2[$ o cualquier subconjunto de este.

II Parte. Respuesta Breve. Para cada uno de los siguientes casos, de acuerdo con cada gráfica de una función f , indique si se cumple o no el Teorema de Rolle en el intervalo I dado, de no cumplirse, describa la hipótesis (condición) que no se cumple. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** (3 puntos)

1) $I = [-1,1]$

R/ Sí se cumplen las hipótesis del teorema.

(La f es continua en I , es derivable en $] -1,1[$, $f(a) = f(b)$)

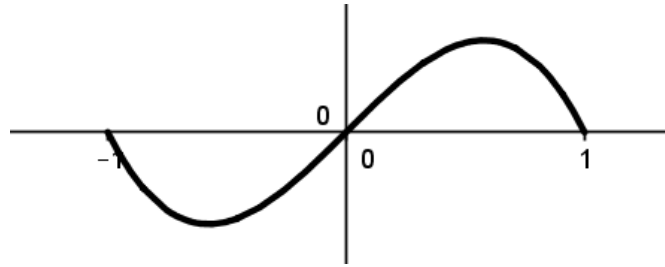


Figura 2.

2) $I = [-1,1]$

R/ No se cumple el Teorema de Rolle, pues f no es derivable en todo punto de $] -1,1[$ dado que en $x = 0$ hay un pico.

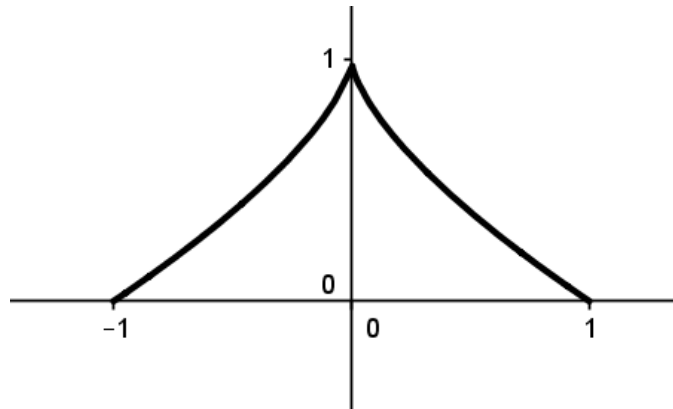


Figura 3.

III Parte. Desarrollo.

1) En la figura 4 se presenta la gráfica de la curva con ecuación $x^2 - y^2 = 3$.

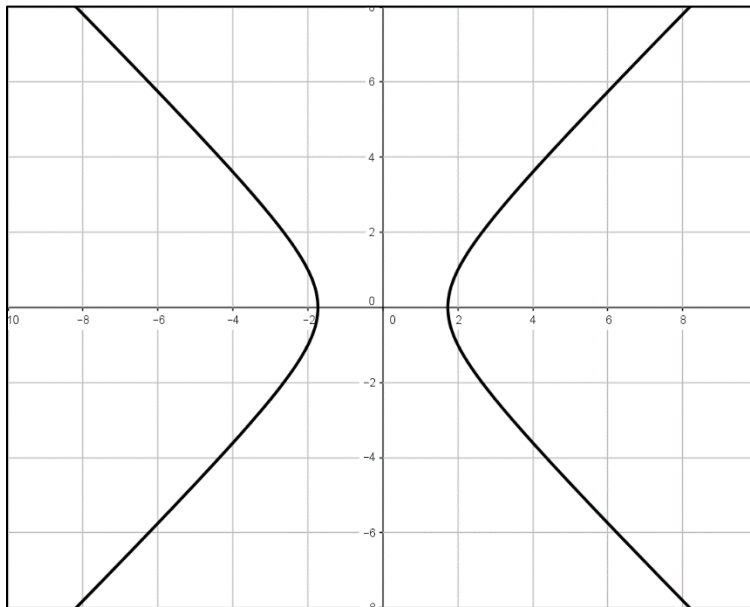


Figura 4

a) (5 puntos) Demuestre que las rectas tangentes a la curva en $(-2,1)$ y $(2,1)$ se intersecan.

Solución:

• Se determina la derivada de la curva usando derivación implícita, y se obtiene:

$$(x^2 - y^2)' = (3)'$$

$2x - 2y \cdot y' = 0$, luego al despejar y' tenemos

$$2x = 2y \cdot y' \rightarrow \frac{x}{y} = y'$$

• Se determina el criterio de la recta tangente en $(-2,1)$:

Para la pendiente: $y'|_{(-2,1)} = -2$,

$$\text{Criterio: } y - 1 = -2(x - -2) \rightarrow y = -2x - 3$$

• Se determina el criterio de la recta tangente en $(2,1)$:

Para la pendiente: $y'|_{(2,1)} = 2$,

$$\text{Criterio: } y - 1 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 3$$

Como ambas rectas tienen el mismo punto de intersección con el eje Y, $(0, -3)$, este punto es común a las rectas de ahí que sea el punto de intersección entre ellas.

b) (4 puntos) Determine los puntos de la curva en los que la recta tangente es paralela a la recta definida por $y = 2x$.

Solución:

• Como la recta tangente de la curva es paralela a la recta $y = 2x$, esto indica que la pendiente es 2, así

$$\frac{x}{y} = 2 \leftrightarrow x = 2y, \text{ de donde los puntos tienen la forma } (2y, y).$$

• Al sustituir $(2y, y)$ en la ecuación de la curva dada, se obtiene

$$(2y)^2 - y^2 = 3$$

$$\leftrightarrow 3y^2 = 3$$

$$\leftrightarrow y = \pm 1$$

• Al sustituir $y = 1$ se tiene $(2,1)$, y si $y = -1$ tenemos $(-2, -1)$, así los puntos de la curva en los que la recta tangente es paralela a $y = 2x$ son $(2,1), (-2, -1)$

2) (4 puntos) Sea f una función polinomial definida en su máximo dominio, tal que $f(x) = -x^3 + kx^2 + 5x - 2$. Determine el valor de k para que f posea un punto de inflexión en $x = 2$.

Solución:

• Se determina la segunda derivada de la función dada:

$$f(x)' = (-x^3 + kx^2 + 5x - 2)'$$

$$f(x)' = -3x^2 + 2kx + 5$$

$$f(x)'' = -6x + 2k$$

• Si la función tiene un punto de inflexión en 2, se tiene

$$f(2)'' = 0$$

$$-6 \cdot 2 + 2k = 0 \leftrightarrow k = 2$$

Por lo tanto, $k = 2$.

3) Determine en cada caso y' , no es necesario simplificar:

a) (7 puntos) $y = [\log_3(2x)]^{\tan^{-1}\sqrt{x}}$.

Solución:

Al utilizar derivación logarítmica se obtiene:

$$\ln y = \ln[\log_3(2x)]^{\tan^{-1}\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow \ln y = \tan^{-1}\sqrt{x} \cdot \ln[\log_3(2x)]$$

$$\rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = (\tan^{-1}\sqrt{x})' \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x} [\ln[\log_3(2x)]]'$$

$$\rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\log_3(2x)} \cdot (\log_3(2x))'$$

$$\rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\log_3(2x)} \cdot \frac{2}{2x \ln 3}$$

$$\rightarrow y' = y \cdot \left[\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\log_3(2x)} \cdot \left(\frac{2}{2x \ln 3} \right) \right]$$

$$\rightarrow y' = [\log_3(2x)]^{\tan^{-1}\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\log_3(2x)} \cdot \left(\frac{2}{2x \ln 3} \right) \right]$$

b) (4 puntos) $y = \arcsen(e^x + x) - 5^{\sec(x)}$

Solución:

Al derivar se obtiene:

$$y' = [\arcsen(e^x + x) - 5^{\sec(x)}]'$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x+x)^2}} \cdot (e^x+x)' - \sec x \cdot \tan x \cdot \ln 5 \cdot 5^{\sec x}$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x+x)^2}} \cdot (e^x+1) - \ln 5 \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot 5^{\sec(x)}$$

4) Calcule los siguientes límites:

a) (6 puntos) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+\sen(x))-x}{x^2} \right]$.

Solución:

- Al sustituir $x = 0$, se tiene $\frac{\ln(1+\sen(0))-0}{0^2} = \frac{0}{0}$, forma indeterminada.

- Aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+\sen(x))-x]'}{(x^2)'}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + \operatorname{sen}(x)} \cdot \cos x - 1}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - (1 + \operatorname{sen}(x))}{1 + \operatorname{sen}(x)}}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - \operatorname{sen}(x)}{2x[1 + \operatorname{sen}(x)]}
\end{aligned}$$

Al evaluar se obtiene forma indeterminada $\frac{\cos(0)-1-\operatorname{sen}(0)}{2 \cdot 0[1+\operatorname{sen}0]} = \frac{0}{0}$

Al aplicar L'Hôpital, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{2[1 + \operatorname{sen}(x)] + 2x \cos x} \\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

b) (7 puntos) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln^2(x)]^x$.

Solución:

- Al sustituir $x = 0^+$, se tiene ∞^0 , forma indeterminada.
- El límite se puede reescribir como:

$$y = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln^2(x)]^x$$

$$\ln(y) = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln^2(x)]^x \right] \rightarrow \ln(y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln[\ln^2(x)]$$

Ahora calculamos el límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln[\ln^2(x)]$:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln[\ln^2(x)]$ que al evaluarlo tiene otra forma indeterminada $0 \cdot \infty$.

- Al aplicar la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln[\ln^2(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\ln^2(x)]}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln[\ln^2(x)]]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\ln^2(x)} \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x\ln(x)}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\ln x}$$

Al aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x$$

$$= 0$$

Como, $\ln(y) = 0 \leftrightarrow e^0 = 1$. Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln^2(x)]^x = 1$

5) Resuelva los siguientes problemas:

a) (7 puntos) Hallar dos números positivos cuya suma es 30 tal que el cuadrado de uno por el cubo del otro sea máximo.

Solución:

- Planteo de las ecuaciones: con x, y números positivos

$$x + y = 30 \rightarrow y = 30 - x,$$

$$x^2 y^3 = P,$$

Luego, el criterio de la función para trabajar corresponde a: $x^2 (30 - x)^3 = P(x)$.

Para determinar el dominio donde tiene sentido el problema dado, conviene hallar los valores que hacen cero a la función, que son 0 y 30, así

$$p(x) = x^2 (30 - x)^3, p: [0,30] \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Calcular p' .

$$p(x) = x^2 (30 - x)^3$$

$$p'(x) = 2x (30 - x)^3 - 3x^2 (30 - x)^2$$

$$p'(x) = x(30-x)^2[2(30-x) - 3x]$$

$$p'(x) = x(30-x)^2(60-5x)$$

$$p'(x) = 5x(30-x)^2(12-x)$$

- Buscar $p'(x)=0$.

$$5x(30-x)^2(12-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12 \vee x = 30$$

- Como la función p es polinomial y continua, cuando $x \in [0,30]$ la función alcanza un máximo, así que al evaluar se obtiene

$$p(0) = 0, p(30) = 0, p(12) = 839808$$

Por lo tanto, los números corresponden a 12 y 18.

- b) (5 puntos)** Determine la velocidad a la que baja el nivel de un fluido contenido en un tanque cilíndrico, sabiendo que se bombea hacia afuera el fluido a razón de 3000 litros por minuto. Recuerde que $1m^3$ posee 1000 l.

Solución:

- Planteo:

$$\left. \begin{array}{l} r \text{ es una constante} \\ V = V(t) \\ h = h(t), t \text{ en minutos} \\ \frac{dV}{dt} = 3000l/\text{min} \\ \frac{dh}{dt} = ? \end{array} \right\}$$

- Criterio de la función que permite trabajar:

$$V = 1000\pi r^2 h, \text{ pues } 1m^3 \text{ posee } 1000 l.$$

- Calcular V' utilizando derivación implícita

$$V' = 1000\pi r^2 h' \rightarrow$$

$$-3000 = 1000\pi r^2 h'$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{\pi r^2} = h'$$

Por lo tanto, el fluido decrece a razón de $\frac{3}{\pi r^2} l/\text{min}$.

6) Gráfica:

