SOLUCIÓN

CUARTO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

27 de setiembre de 2017

1a) **(6 puntos)** Calcule $\int \sec(x)dx$ para demostrar que es igual a $\ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$.

$\int \sec(x)dx =$

$\int \sec(x) \cdot \frac{[\sec(x)+\tan(x)]}{[\sec(x)+\tan(x)]} dx =$

Sea $u = \sec(x) + \tan(x) \Rightarrow du = \sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)\, dx = \sec(x)\,[\tan(x) + \sec(x)]dx$, entonces

$\int \sec(x) \cdot \frac{[\sec(x)+\tan(x)]}{[\sec(x)+\tan(x)]} dx = \int \frac{1}{u} du$

$= \ln|u| + C =$

$= \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$

1b) (9 puntos) Calcule $\int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x}dx$ para demostrar que es igual a $-2\left(\frac{5^{-x}}{\ln 5}\right)+5\left(\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right)+C$.

Primero se expresa el integrando de la siguiente forma:

$$\frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x}=$$

$$\frac{2^{x+1}}{10^x}-\frac{5^{x+1}}{10^x}=$$

$$\frac{2\cdot 2^x}{10^x}-\frac{5\cdot 5^x}{10^x}=$$

$$2\left(\frac{1}{5}\right)^x-5\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Luego: $\int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x}dx = 2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - 5\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$

$$2\int 5^{-x}dx-5\int 2^{-x}dx$$

Calculemos una, la otra se obtiene de forma análoga:

$$2\int 5^{-x}dx$$

Sea $u=5^{-x} \Rightarrow du=-5^{-x}\ln(5)dx \Rightarrow \frac{-1}{\ln(5)}du=5^{-x}dx$, entonces

$$2\int 5^{-x}dx = 2\cdot\frac{-1}{\ln(5)}\int du=$$

$$2\cdot\frac{-1}{\ln(5)}u+C=$$

$$2\cdot\frac{-1}{\ln(5)}5^{-x}+C$$

Luego para $5\int 2^{-x}dx = 5\cdot\frac{-1}{\ln(2)}2^{-x}+C$. Por lo tanto

$$2\int 5^{-x}dx-5\int 2^{-x}dx = 2\left(\frac{5^{-x}}{\ln(5)}\right)+5\left(\frac{2^{-x}}{\ln(2)}\right)+C$$

Calcule las siguientes integrales

2a) (7 puntos) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

Sea $y^2 = x \Rightarrow 2ydy = dx$

Cambio de los límites de integración: Si $x = 1 \Rightarrow y = 1$, si $x = 4 \Rightarrow y = 2$.

Luego

$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = 2\int_1^2 e^y y\, dy$

Integración por partes:
$u = y \Rightarrow du = dy$
$dv = e^y dy \Rightarrow v = e^y$

Ahora $2\int_1^2 e^y y\, dy = 2\left(ye^y\big|_1^2 - \int_1^2 e^y dy\right)$

$2\left(ye^y\big|_1^2 - e^y\big|_1^2\right) =$

$2e^2$

2b) (8 puntos) $\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} dx.$

Sea $2x = \sec(\theta)$ entonces, $dx = \frac{1}{2}\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$

Luego $4x^2 - 1 = \sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$, entonces se considera la siguiente integral

$\int \frac{\frac{\tan(\theta)\sec(\theta)\tan(\theta)}{2}}{\frac{\sec(\theta)}{2}} d\theta =$

$\int \tan^2(\theta) d\theta =$

$\int \sec^2(\theta) - 1\, d\theta =$

$tan(\theta) - \theta + C =$

$\sqrt{4x^2 - 1} - \sec^{-1}(2x) + C$

2c) **(10 puntos)** $\int \frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2-4x+7)} dx.$

Descomponiendo en fracciones parciales, se tiene:

$\frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2-4x+7)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2-4x+7)}$

$$\frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2-4x+7)} = \frac{A(x^2-4x+7)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-4x+7)}$$

$x^2+7x-6 = A(x^2-4x+7)+(Bx+C)(x+1)$

$A = -1$

$C = 1$

$B = 2$

Luego

$\int \frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2-4x+7)} dx = -\int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2x-4}{x^2-4x+7} dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$

$-\ln|x+1| + \ln|x^2-4x+7| + \frac{5\sqrt{3}}{9} arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + C$

2d) **(7 puntos)** $\int \operatorname{sen}^4(x) dx.$

$\int \cos^2(x) dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx =$

$\frac{1}{4}\int (1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)) dx =$

$$\frac{1}{4}x + \frac{sen(2x)}{4} + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2} dx =$$

$\frac{1}{8}x + \frac{sen(2x)}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} sen(4x) =$

3a) **(6 puntos)** $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx =$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx \right) =$$

Calculando $\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx = \arctan\,(e^x) + C$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx \right) = \lim_{n\to\infty} \arctan(e^x)\Big|_0^n = \lim_{n\to\infty} \arctan(e^n) - \arctan(e^0) =$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ converge a $\frac{\pi}{4}$

3b) **(5 puntos)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\,(x) dx =$

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^n \sec\,(x) dx =$$

De la parte 1a)

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec(x) + \tan\,(x)|\Big|_0^n =$$

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec(n) + \tan\,(n)| - \ln 1 =$$

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec(n) + \tan\,(n)| - \ln 1 = +\infty$$

Por lo tanto, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\,(x) dx$ diverge