Universidad de Costa Rica

MATEM-UCR

Solucionario I Parcial Cálculo 1

I Parte: Selección única Marque una equis (X) sobre la letra que antecede a la única respuesta correcta. Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva elección en su cuaderno de examen. (5 puntos, un punto cada respuesta correcta).

Ítem	1	2	3	4	5
Respuesta	A	C	D	D	C

II Parte: Respuesta corta La siguiente figura corresponde a la gráfica de $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$. Conteste en su cuaderno de examen lo que se le solicita. (10 puntos, 1 punto cada respuesta correcta).

a. $-\infty$

b. $+\infty$

c. $+\infty$

d. 0

e. 0

f. No porque los límites laterales son diferentes.

g. $x = 1$

h. $x = 6$

i. $x = 8$

j. $x = 4$

III Parte. Desarrollo Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to-3} \frac{\sqrt{(x+3)^2}}{x^4-81} = \frac{0}{0}$ Forma indeterminda.

$$\lim_{x\to-3^+} \frac{|x+3|}{(x^2-9)(x^2+9)} = \lim_{x\to-3^+} \frac{\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}(x^2+9)} = \frac{-1}{108}$$

$$\lim_{x\to-3^-} \frac{|x+3|}{(x^2-9)(x^2+9)} = \lim_{x\to-3^-} \frac{-\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}(x^2+9)} = \frac{1}{108}$$

$\displaystyle\lim_{x\to-3^+} \frac{\sqrt{(x+3)^2}}{x^4-81} \neq \lim_{x\to-3^-} \frac{\sqrt{(x+3)^2}}{x^4-81}$ por lo tanto, el límite no existe. **(5 puntos)**

b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}} = \frac{3}{4}$ **(3 puntos)**

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{sen(x)-cos(x)}{cos(2x)} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{sen(x)-cos(x)}{cos^2(x)-sen^2(x)} =$

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{-\cancel{[cos(x)-sen(x)]}}{\cancel{[cos(x)-sen(x)]}[cos(x)+sen(x)]} =$$

$\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{-1}{cos(x)+sen(x)} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ **(5 puntos)** *d)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{[\sqrt{x^2+2x-1}+x][\sqrt{x^2+2x-1}-x]}{[\sqrt{x^2+2x-1}-x]} =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x-1}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{2}{x}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}+1\right)} = -1$$ **(5 puntos)**

2. Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2a & si \quad x \leq 2 \\ \\ bx+2 & si \quad 2 < x < 5 \\ \\ -x^2 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

$f(2) = 2a$
$\lim_{x\to2^-} f(x) = 2a$
$\lim_{x\to2^+} f(x) = 2b+2$
$2a = 2b+2$

$f(5) = -25$
$\lim_{x\to5^-} f(x) = 5b+2$
$\lim_{x\to2^+} f(x) = -25$
$5b = -27$
$b = \dfrac{-27}{5}$

Entonces: $2a = 2+2\left(\dfrac{-27}{5}\right) \Rightarrow a = -\dfrac{22}{5}$
$\therefore$ para que f sea continua: $a = -\dfrac{22}{5}$ y $b = \dfrac{-27}{5}$.
Además, ax, $bx+2$, $-x^2$ son polinomios $\therefore$ son continuos en $\mathbb{R}$.
$\therefore$ f es continua en $\mathbb{R}$.

3. Considere la función definida en su máximo dominio, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) **Paso 1** $f(0) = 0$

Paso 2 $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

$$-1 \leqslant sen\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1 \Rightarrow \cancelto{0}{-x^2} \leqslant \cancelto{0}{x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)} \leqslant \cancelto{0}{x^2}$$ por Teorema de Intercalación.

Paso 3 $f(0) = \lim_{x\to0} f(x) \therefore f$ es continua en $x = 0$ **(3 puntos)**

b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\cancelto{x}{x^2} sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to0} x sen\left(\frac{1}{x}\right)$

$-1 \leqslant sen\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1 \Rightarrow \cancelto{0}{-x} \leqslant \cancelto{0}{xsen\left(\frac{1}{x}\right)} \leqslant \cancelto{0}{x}$

Entonces, por el Teorema de intercalación: $\lim\limits_{x\to 0} xsen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ **(3 puntos)**

4. Determine si posee asíntotas verticales u horizontales. De ser así, escriba la ecuación de cada una de ellas (7 puntos).

   $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2} = \dfrac{x+2}{(x-2)(x-1)}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \therefore y = 0$ es una asíntota horizontal.

   $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty \therefore x = 2$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

5. En cada caso calcule la primera derivada de f, no debe simplificar (10 puntos, 5 puntos cada una).

   a) $f(x) = sec^2[cos(x^2-3x)+e^{2x}]$

   $$f'(x) = 2sec[cos(x^2-3x)+e^{2x}] \cdot sec[cos(x^2-3x)+e^{2x}] \cdot tan[cos(x^2-3x)+e^{2x}] \cdot$$
   $$[-sen(x^2-3x)(2x-3)+2e^{2x}]$$

   b) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-tan(x)}{1+e^{5x}}}$

   $$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-tan(x)}{1+e^{5x}}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left[\frac{-sec^2(x)(1+e^{5x})-5e^{5x}(1-tan(x))}{(1+e^{5x})^2}\right]$$

6. Determine la o las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, que sean paralelas a la recta $2y = x+1$ (8 puntos).

   $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

   $y' = \dfrac{1\cdot(x-1)-(x-1)}{(x+1)^2}$

   $m_1 = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

   $2y = x+1$

   $y = \dfrac{x+1}{2}$

   $m_2 = \dfrac{1}{2}$

   Como son paralelas, $m_1 = m_2 \Rightarrow \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow |x+1| = 2$

   $x+1 = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0)$

   $y_1 = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

   $x+1 = -2 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3,2)$

   $y_2 = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{2}$

   Siendo y_1 y y_2 tangentes a $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ y paralelas a $2y = x+1$.