Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2011

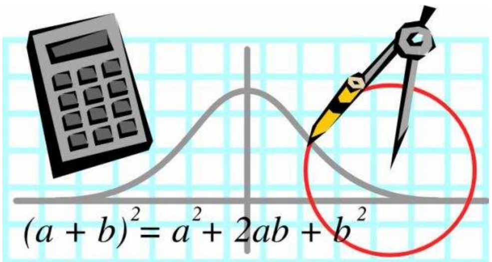
http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
-Décimo Año-

I EXAMEN PARCIAL 2011

Nombre: ______________________________________ Código: ___________

Colegio: ____



Fórmula

1

Sábado 16 de abril de 2011

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección y está constituida por 32 ítems y la segunda es de desarrollo y la conforman 3 ítems.

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que permite realizar únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 32 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. Al factorizar completamente $25x^2 - 25 + 4y^2 - 20xy$ uno de los factores corresponde a

(A) $5x - 2y + 25$

(B) $5x - 2y + 5$

(C) $5x - 4y - 5$

(D) $5x + 4y + 5$

2. Al factorizar completamente $-125(5-x)+(5-x)^4$ uno de los factores corresponde a

(A) $10 + x$

(B) $-5 - x$

(C) $x^2 - 15x + 75$

(D) $x^2 + 5x + 25$

3. Al factorizar completamente la expresión $4x^4 - 8x^2 + 4$ uno de los factores es

(A) $x^2 + 1$

(B) $(x+1)^2$

(C) $x^2 + x + 1$

(D) $x^2 + x - 1$

4. Al factorizar completamente $21x - 15p - 9a - 6ax - 10px + 14x^2$ uno de los factores corresponde a

(A) $2x - 3$

(B) $3x - 2$

(C) $7x + 3a + 5p$

(D) $7x - 3a - 5p$

5. La expresión $\dfrac{\left(x^2+14x+49\right)^3}{x+7} \div \dfrac{4}{\left(2x^2-98\right)^{-4}}$ es equivalente a

(A) $\dfrac{(x+7)^4}{64(x-7)}$

(B) $\dfrac{(x+7)^4}{16(x-7)}$

(C) $\dfrac{x+7}{64(x-7)^4}$

(D) $\dfrac{x+7}{16(x-7)^4}$

6. La expresión $\dfrac{4-x}{x^2-x-12}+\dfrac{x}{x+3}$ es equivalente a

(A) $x+1$

(B) $\dfrac{x+1}{x+3}$

(C) $\dfrac{x-1}{x+3}$

(D) $\dfrac{4}{(x-4)(x+3)}$

7. Una solución de la ecuación $(x+3)(2x-5)=-13$ corresponde a

(A) -4

(B) 6

(C) $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$

(D) $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$

8. La ecuación $x(-5x+3)=x(x-1)$ tiene la siguiente cantidad de soluciones

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

9. Si $\frac{1}{2}$ es un cero del polinomio $p(x)=2x^2+2ax+x+a$, entonces el valor de a corresponde a

(A) 0

(B) -1

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $-\frac{1}{2}$

10. Considere las siguientes ecuaciones:

I. $-2x^2+5x=3$
II. $-x+2x^2+3=0$

¿Cuáles de las ecuaciones anteriores tiene como solución $S=\varnothing$?

(A) Ambas
(B) Ninguna
(C) Sólo la I
(D) Sólo la II

11. La ecuación $2x^3-3x^2-23x+12=0$ tiene

(A) dos soluciones negativas y una solución positiva

(B) dos soluciones positivas y una solución negativa

(C) una solución entera y dos irracionales

(D) solamente una solución

12. El conjunto solución de la ecuación $x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x = 0$ tiene

(A) cero elementos

(B) un sólo elemento

(C) dos elementos distintos

(D) cuatro elementos distintos

13. El conjunto solución de la ecuación $\dfrac{(x-3)-(-x+9)}{x-6} = 1$ es igual a

(A) $\mathbb{R}$

(B) $\mathbb{R} - \{6\}$

(C) $\{3, 6, 9\}$

(D) $\varnothing$

14. El conjunto solución de la ecuación $\left(\dfrac{5}{x-1} + 3x\right)\left(2x - \dfrac{4}{x+1}\right) = 0$ tiene

(A) cero soluciones

(B) una solución entera

(C) dos soluciones enteras

(D) cuatro soluciones reales

15. El conjunto solución de $-x^2 < x - 6$ corresponde a

(A) $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$

(B) $]-2, 3[$

(C) $]-3, 2[$

(D) $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$

16. El conjunto solución de $x^4 - 1 \leq -x^4 + 1$ corresponde a

(A) $\mathbb{R}$

(B) $\varnothing$

(C) $[-1, 1]$

(D) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

17. El conjunto solución de $(x-2)^2 - 5(x-2) + 4 > 0$ corresponde a

(A) $\mathbb{R}$

(B) $]3, 6[$

(C) $]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$

(D) $]-\infty, 3[\cup]6, +\infty[$

18. El conjunto solución de $x^4 - x^2 + 6 > 0$ corresponde a

(A) $\mathbb{R}$

(B) $\varnothing$

(C) $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$

(D) $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$

19. El conjunto solución de $\dfrac{(x-1)^3}{x^3 - 1} \geq 0$ corresponde a

(A) $\varnothing$

(B) $\{1\}$

(C) $\mathbb{R} - \{1\}$

(D) $]-\infty, 1[$

20. Considere las siguientes desigualdades

I. $\dfrac{-1}{x^2+4} > 0$

II. $\dfrac{1}{x^2+1} > 0$

III. $-x^4 \leq 0$

IV. $\dfrac{1}{x^2} > 0$

De ellas, tienen como conjunto solución $\mathbb{R}$

(A) I y IV únicamente

(B) II y III únicamente

(C) I, II y III únicamente

(D) II, III y IV únicamente

21. El conjunto solución de $\dfrac{2x^2-3x+1}{x-3} \leq 2x-1$ corresponde a

(A) $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right[$

(B) $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$

(C) $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$

(D) $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left]3, +\infty\right[$

22. La ecuación $-x=\sqrt{-x}$ tiene la siguiente cantidad de soluciones

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

23. La solución de la ecuación $-2+3\sqrt{3-x}-x+1=0$ es un número real

(A) menor que 1

(B) entre 0 y 4

(C) entre 4 y 8

(D) mayor que 8

24. La solución de la ecuación $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}=-1$ es un número real

(A) menor que 5

(B) entre 5 y 8

(C) entre 8 y 12

(D) mayor que 12

25. El conjunto solución de $\sqrt{x-1}=-x+1$ es

(A) $\varnothing$

(B) $\{1\}$

(C) $\{2\}$

(D) $\{1,2\}$

26. El conjunto solución de la ecuación $|3x+12|=8$ tiene

(A) cero elementos
(B) dos elementos positivos
(C) dos elementos negativos
(D) un elemento negativo y otro positivo

27. Sea S el conjunto solución de la ecuación $|x-2|=-a-5$. Analice las siguientes proposiciones:

I. Si $a<-5$ entonces $S=\mathbb{R}$
II. Si $a>0$ entonces $S=\emptyset$

De ellas, son verdaderas

(A) Sólo la I
(B) Sólo la II
(C) Ambas
(D) Ninguna

28. El conjunto solución de $\left|\dfrac{x+3}{-4}\right|\leq 2$ corresponde a

(A) $]-\infty,5]$
(B) $[5,+\infty[$
(C) $[-5,11]$
(D) $[-11,5]$

29. El conjunto solución de $|3-x|+4\geq 3$ es

(A) $\emptyset$
(B) $\mathbb{R}$
(C) $[2,4]$
(D) $]-\infty,2]\cup[4,+\infty[$

30. El conjunto solución de $\left|-7x+5\right| \leq 0$ es

(A) $\varnothing$

(B) $\mathbb{R}$

(C) $\left\{\frac{5}{7}\right\}$

(D) $\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{7}\right\}$

31. Ana y Marta comparten una ruta de distribución de periódicos. Si a Marta le toma 50 minutos cubrir toda la ruta y Ana necesita 60 minutos ¿cuánto tiempo tardarían (aproximadamente) si trabajan juntas?

(A) 45 minutos.

(B) 110 minutos.

(C) 27 minutos y 20 segundos.

(D) 20 minutos y 20 segundos.

32. Considere el siguiente problema:

> La suma de dos números enteros positivos y consecutivos es igual a su producto disminuido en 29.

Con certeza, el menor de los números

(A) es menor que 3

(B) está entre 3 y 7

(C) está entre 8 y 12

(D) es mayor que 12

fin

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2011

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

MATEM
Matemática para la Enseñanza Media

PRIMER EXAMEN PARCIAL 2011 - Sábado 16 de abril

Nombre completo: ________________________________ CÓDIGO: ___________

COLEGIO: ____

PREGUNTA	Puntos obtenidos
1	
2	
3	
TOTAL	

SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor 18 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

A. (6 puntos) Determine (en $\mathbb{R}$) el **conjunto solución** de la ecuación:

$$\frac{-10x}{-2x^2+8x-8}-\frac{14}{21x+42}-\frac{x}{3x^2-12}=0$$

B. (6 puntos) Determine (en $\mathbb{R}$) **el conjunto solución** de la inecuación:

$$\frac{\left(-25x^2+10x-4\right)\left(x+2\right)^7}{\left(x-1\right)^6\left(-2x+3\right)\left(2x^2-1\right)}\leq 0$$

C. (6 puntos) Resuelva el siguiente problema, utilizando para ello ecuaciones.

Una pieza de alambre de 8 pies de longitud será cortada en dos partes y cada parte se doblará para formar un cuadrado. ¿De qué longitud debe ser cada uno de los pedazos si la suma de las áreas de los cuadrados debe ser de 2 pies cuadrados?

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2011

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

SOLUCIONARIO

PRIMER EXAMEN PARCIAL 2011 - Sábado 16 de abril

Selección única

1	B		8	C		15	D		22	C		29	B	
2	C		9	D		16	C		23	B		30	C	
3	B		10	D		17	D		24	B		31	C	
4	D		11	B		18	A		25	B		32	B	
5	C		12	C		19	C		26	C				
6	C		13	D		20	B		27	B				
7	D		14	B		21	A		28	D				

Desarrollo

A. (6 puntos) Determine (en $\mathbb{R}$) el **conjunto solución** de la ecuación:

$$\frac{-10x}{-2x^2+8x-8}-\frac{14}{21x+42}-\frac{x}{3x^2-12}=0$$

Solución:
Note que se deben considerar las restricciones $x \neq -2$ y $x \neq 2$.

$$\frac{-10x}{-2x^2+8x-8}-\frac{14}{21x+42}-\frac{x}{3x^2-12}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-10x}{-2\left(x^2-4x+4\right)}-\frac{14}{21(x+2)}-\frac{x}{3\left(x^2-4\right)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{(x-2)^2}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{x}{3(x-2)(x+2)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{15x(x+2)-2(x-2)^2-x(x-2)}{3(x-2)^2(x+2)}=0$$

$$\Rightarrow 15x(x+2)-2(x-2)^2-x(x-2)=0$$

$$\Rightarrow 15x^2+30x-2\left(x^2-4x+4\right)-x^2+2x=0$$

$$\Rightarrow 15x^2+30x-2x^2+8x-8-x^2+2x=0$$

$$\Rightarrow 12x^2+40x-8=0$$

$$\Rightarrow 4\left(3x^2+10x-2\right)=0$$

$$\Rightarrow 3x^2+10x-2=0$$

Esta ecuación se resuelve usando la fórmula general:

$$\begin{array}{ll} a=3 & \Delta=b^2-4ac \\ b=10 & \Delta=(10)^2-4\cdot 3\cdot -2 \\ c=-2 & \Delta=124 \end{array}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{124}}{6}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-10+\sqrt{124}}{6} \text{ o } x=\frac{-10-\sqrt{124}}{6}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-5+\sqrt{31}}{3} \text{ o } x=\frac{-5-\sqrt{31}}{3}$$

Como los números anteriores no son restricciones, se tiene que el conjunto solución es

$$S=\left\{\frac{-5+\sqrt{31}}{3},\frac{-5-\sqrt{31}}{3}\right\}$$

B. (6 puntos) Determine (en $\mathbb{R}$) **<u>el conjunto solución</u>** de la inecuación:

$$\frac{\left(-25x^2+10x-4\right)\left(x+2\right)^7}{\left(x-1\right)^6\left(-2x+3\right)\left(2x^2-1\right)} \leq 0$$

<u>Solución</u>:

a. Se debe considerar $x \neq 1$, $x \neq \frac{3}{2}$, $x \neq \frac{-1}{\sqrt{2}}$ y $x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b. $-25x^2+10x-4$ siempre es negativo dado que $\Delta < 0$ y el coeficiente de x^2 es negativo.

c. $\left(x-1\right)^6$ es positivo para todo $x \neq 1$.

d. $2x^2-1=\left(\sqrt{2}x+1\right)\left(\sqrt{2}x-1\right)$

Entonces se tiene que:

	$-\infty$		-2		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-25x^2+10x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$\left(x+2\right)^7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\left(x-1\right)^6$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$-2x+3$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{2}x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\sqrt{2}x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$		$-$		$+$	

Por lo que el conjunto solución es $S=\left[-2,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[\cup \left]1,\frac{3}{2}\right[$

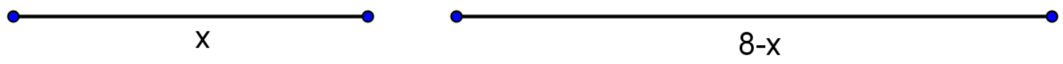
O bien $S=\left[-2,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2}\right[-\{1\}$

C. (6 puntos) Resuelva el siguiente problema, utilizando para ello ecuaciones.

Una pieza de alambre de 8 pies de longitud será cortada en dos partes y cada parte se doblará para formar un cuadrado. ¿De qué longitud debe ser cada uno de los pedazos si la suma de las áreas de los cuadrados debe ser de 2 pies cuadrados?

<u>Solución</u>:

Sea x la longitud de uno de los pedazos, entonces $8-x$ es la longitud del otro pedazo. (Dado que sumando ambas debe dar 8)



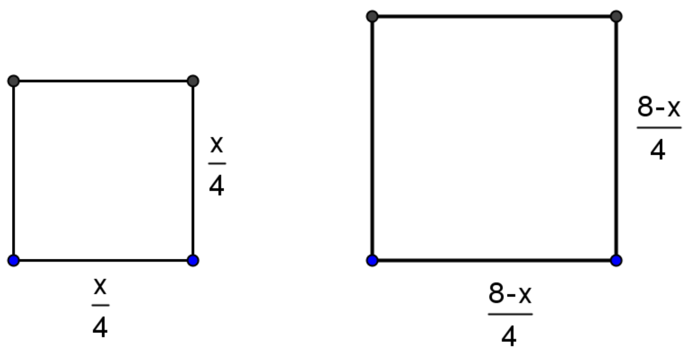
Como cada pieza de alambre se cortará para formar un cuadrado, se tiene que:

a) Con el trozo de alambre de longitud x, cada uno de los lados del cuadrado formado tiene una longitud de $\frac{x}{4}$, y el área de la región limitada por dicho cuadrado está dada por

$$A_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

b) Con el trozo de alambre de longitud $8-x$, cada uno de los lados del cuadrado tiene una longitud de $\frac{8-x}{4}$ y el área de la región limitada por este cuadrado está dada por

$$A_2 = \left(\frac{8-x}{4}\right)^2$$



Como la suma de las áreas de los cuadrados formados es 2, se tiene que $A_1 + A_2 = 2$

Es decir:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{(8-x)^2}{4^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{64-16x+x^2}{16} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{64-16x+x^2}{16} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+64-16x+x^2-32}{16} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 - 16x + 64 - 32 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 16x + 32 = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(x^2 - 8x + 16\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 4 = 0$$

$\Rightarrow x = 4$ (el cuadrado de un número es cero si y sólo si el número es cero)

Por lo tanto, el alambre debe cortase a la mitad, es decir, cada pedazo tiene que medir 4 pies.