



Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2009

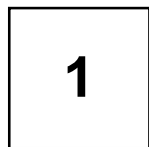


PROYECTO MATEM
-Matemática en la Enseñanza Media-

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
-Décimo Año-

II EXAMEN PARCIAL 2009

Fórmula



Sábado 20 de junio de 2009

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección y está constituida por 38 ítems; la segunda es de complete y la conforman 3 ítems; la tercera es de desarrollo y la conforman 2 ítems.
4. La parte de selección debe ser contestada en las hojas de respuestas que se le darán para tal efecto.
5. En cada una de las hojas de respuesta debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **solo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En los ítems de desarrollo y complete, debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra. Si esta parte del **examen contiene** partes escritas con **lápiz** usted **pierde el derecho a reclamar.**
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará.**
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 38 puntos)

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, solo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. Analice las siguientes relaciones:

I. $g :]-\infty, -4[\rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 25}$

II. $k : [-20, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, con $k(x) = \sqrt{-x + 2}$

¿Cuáles de las relaciones anteriores corresponden a funciones?

- (A) Solo la I.
- (B) Solo la II.
- (C) Ambas.
- (D) Ninguna.

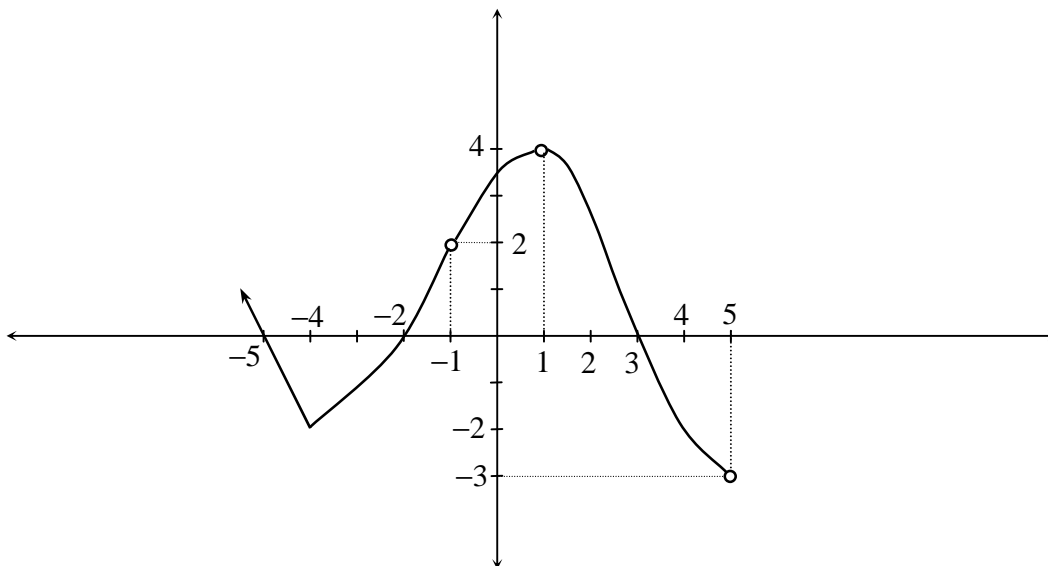
2. Sea $f(x) = x^2 + 2x$ y $h \neq 0$ entonces $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es igual a

- (A) $\frac{h^2 + 2x + 2a}{h}$
- (B) $2ah + h + 2h$
- (C) $2a + h + 2$
- (D) $h + 2$

3. Si $f :]-\infty, -3[\rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 - 10$ entonces la cantidad de preimágenes de -6 es igual a

- (A) 3
- (B) 2
- (C) 1
- (D) 0

Considere la siguiente gráfica de una función f y con base en ella conteste los ítems del 4 al 8.



4. El dominio de la función f es el siguiente

- (A) $]-\infty, 5[$
- (B) $]-\infty, 5] - \{-1, 1\}$
- (C) $]-\infty, 5[- \{-1, 1\}$
- (D) $]-\infty, -1[\cup]-1, 5[$

5. El ámbito de la función f es el siguiente

- (A) $]-3, 4[$
- (B) $]-3, +\infty[$
- (C) $]-3, +\infty[- \{2, 4\}$
- (D) $]-3, 4[\cup]4, +\infty[$

6. La cantidad de preimágenes de 2 es igual a
- (A) 0
 - (B) 1
 - (C) 2
 - (D) 3
7. El conjunto solución de la inecuación $f(x) < 0$ es igual a
- (A) $]-\infty, -5[\cup]-2, 5[$
 - (B) $]-5, -2[\cup]3, 5[$
 - (C) $[-5, -2] \cup [3, 5[$
 - (D) $]-3, 0[$
8. Un intervalo donde f es decreciente corresponde a
- (A) $]-4, -2[$
 - (B) $]-5, -2[$
 - (C) $]-1, 1[$
 - (D) $]1, 4[$

9. El dominio máximo de la función f dada por $f(x) = \frac{\sqrt{-1+x}}{x-3}$ es

- (A) $[1, +\infty[$
- (B) $]3, +\infty[$
- (C) $]1, 3[\cup]3, +\infty[$
- (D) $[1, 3[\cup]3, +\infty[$

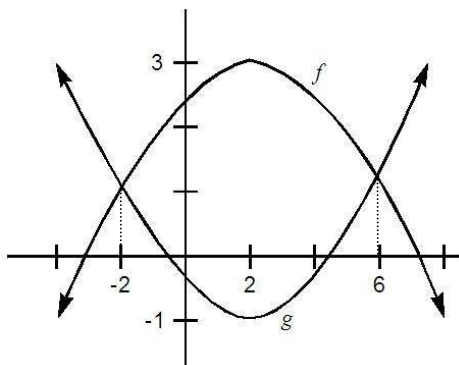
10. Si p es una función cuyo criterio es $p(x) = \frac{4}{x^{-1} \cdot \sqrt{-x^2 + 9}}$ entonces su dominio máximo corresponde a

- (A) $] -3, 3[$
- (B) $\mathbb{R} - \{-3, 0, 3\}$
- (C) $] -3, 0[\cup] 0, 3[$
- (D) $] -\infty, -3[\cup] 3, +\infty[$

11. Si $f : [-2, 2] \rightarrow [3, 7]$, con $f(x) = x^2 + 3$, entonces se cumple que f

- (A) es inyectiva y es sobreyectiva.
- (B) no es inyectiva y no es sobreyectiva.
- (C) es inyectiva pero no sobreyectiva.
- (D) es sobreyectiva pero no inyectiva.

12. Observe la figura adjunta.



Un intervalo en el que se cumple $f(x) > g(x)$ corresponde a

- (A) $[-2, 4]$
- (B) $]-\infty, -2]$
- (C) $]2, 5[$
- (D) $] -3, 7[$

13. Considere la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 4x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 9 - 5x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$, entonces la

expresión $\frac{f(-3) + f(0) f(2)}{f(3)}$ es igual a

- (A) $\frac{-5}{6}$
- (B) $-\frac{3}{2}$
- (C) -9
- (D) $1,5$

14. Considere las siguientes funciones:

I. $p: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, con $p(x) = -x^2$

II. $w:]-\infty, 0] \rightarrow]-\infty, 0]$, con $w(x) = -x^2$

¿Cuáles de las funciones anteriores son sobreyectivas?

- (A) Solo la I.
- (B) Solo la II.
- (C) Ambas.
- (D) Ninguna.

15. Considere la función $f(x) = 4 - x^2$. Se puede asegurar que f es inyectiva si se define con el siguiente dominio

- (A) \mathbb{R}
- (B) $[-2, 2]$
- (C) $[0, +\infty[$
- (D) $] -\infty, 4]$

16. Si $h(x) = \frac{-5}{x-4}$ con $h:]-\infty, 4[\rightarrow]0, +\infty[$, entonces $h^{-1}(x)$ es igual a

- (A) $\frac{-5 + 4x}{x}$
- (B) $\frac{5}{x-4}$
- (C) $\frac{x-4}{5}$
- (D) $-\frac{1}{x}$

17. Sea $h:]-\infty, -1[\rightarrow]-\infty, 0[$ con $h(x) = -x^2 + 1$, entonces su función inversa corresponde a

- (A) $h^{-1}:]-\infty, 0[\rightarrow]-\infty, -1[$, $h^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$
- (B) $h^{-1}:]-\infty, 0[\rightarrow]-\infty, -1[$, $h^{-1}(x) = -\sqrt{1-x}$
- (C) $h^{-1}:]-\infty, 0[\rightarrow]-\infty, 1[$, $h^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$
- (D) $h^{-1}:]-\infty, 0[\rightarrow]-\infty, 1[$, $h^{-1}(x) = -\sqrt{1-x}$

18. El punto o los puntos de intersección de la gráfica de la función $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-2x^2 + 13x - 15}{x-1}$, con el eje X corresponde o corresponden a

- (A) $(5, 0)$ y $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
- (B) $(0, 5)$ y $\left(0, \frac{3}{2}\right)$
- (C) $(0, 15)$
- (D) $(15, 0)$

19. Si $f(x) = \frac{-x^2}{2} + 1$ y $h(x) = \sqrt[3]{-x}$ entonces $(f \circ h)(8)$ es igual a

- (A) -1
- (B) 3
- (C) $\sqrt[3]{31}$
- (D) $-\sqrt[3]{31}$

20. Si $g(x) = \sqrt{2+x^2}$ entonces $(g \circ g)(x)$ está dada por

- (A) $2+x$
- (B) $2+x^2$
- (C) $\sqrt{4+x^2}$
- (D) $\sqrt{2+\sqrt{2+x^2}}$

21. El criterio de la función lineal " f " a cuya gráfica pertenecen los puntos $(2, -4)$ y $(1, 1)$ es

- (A) $f(x) = 6 - 5x$
- (B) $f(x) = 6x - 5$
- (C) $f(x) = \frac{6-x}{5}$
- (D) $f(x) = \frac{-1}{5}x - \frac{18}{5}$

22. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = -ax + 2x + 5$ es creciente, con certeza a es un número real

- (A) positivo
- (B) negativo
- (C) mayor que -1
- (D) menor que 3

23. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = mx + b$ tal que $g(-3) = -2$ y $g^{-1}(8) = 2$ entonces se puede afirmar que

- (A) $m = 2$ y $b = -8$
- (B) $m = 2$ y $b = 4$
- (C) $m = -2$ y $b = 12$
- (D) $m = -2$ y $b = 4$

24. Si el dominio de la función f dada por $f(x) = 5 - 3x$ es $]-\infty, 2]$ entonces el ámbito de f es

- (A) $]-\infty, -1]$
- (B) $[-1, +\infty[$
- (C) $]-\infty, 1]$
- (D) $[1, +\infty[$

25. La ecuación de la recta que contiene al punto $(-2, 1)$ y es perpendicular a la recta $y = 3x - 1$ es

- (A) $y = \frac{-1}{3}x - 1$
- (B) $y = \frac{-x - 5}{3}$
- (C) $y = 3x + 7$
- (D) $y = \frac{-x + 1}{3}$

26. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 4p - 5x$ y $(-1, 3)$ pertenece al gráfico de f entonces f interseca al eje X es el punto

(A) $\left(\frac{-2}{5}, 0\right)$

(B) $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$

(C) $(-2, 0)$

(D) $(2, 0)$

27. Si las ecuaciones $3y - 5x = 2$ y $2y + (3k + 4)x = 1$ determinan dos rectas paralelas entonces el valor de k es

(A) $\frac{-22}{9}$

(B) $\frac{-14}{15}$

(C) $\frac{2}{9}$

(D) -3

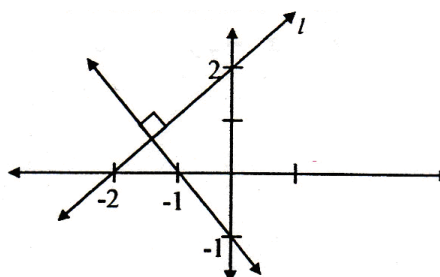
28. Considere la gráfica adjunta, la ecuación que define a la recta l es

(A) $y = x - 1$

(B) $y = -x - 1$

(C) $y = -x + 2$

(D) $y = x + 2$



29. Si m y n son dos rectas perpendiculares que se intersecan en $(-3, 2)$ y m corta al eje Y en 5 entonces la ecuación de n corresponde a

- (A) $y = x + 5$
- (B) $y = -x + 5$
- (C) $y = \frac{-1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (D) $y = -x - 1$

30. El punto medio del \overline{PQ} es $(-1, 1)$ con $P(-6, 5)$ y $Q(m, n)$, entonces $m + n$ es igual a

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) -1

31. Si $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$, $C(2, 1)$, $D(-1, -2)$, entonces el perímetro del paralelogramo $ABCD$ es

- (A) 3
- (B) $3\sqrt{2}$
- (C) $6 + 6\sqrt{2}$
- (D) $3 + 3\sqrt{2}$

32. El ámbito de la función $f : [-10, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = -9 + x^2 + 8x$ es igual a

- (A) $[-9, 11]$
- (B) $[-9, +\infty[$
- (C) $[-25, 11]$
- (D) $[-25, +\infty[$

Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = -6x^2 + 40x + 14$ y con base en ella conteste los ítems del 33 al 36.

33. El eje de simetría corresponde a

- (A) $x = \frac{-242}{3}$
- (B) $x = \frac{-10}{3}$
- (C) $x = \frac{242}{3}$
- (D) $x = \frac{10}{3}$

34. El conjunto solución de la inecuación $f(x) > 0$ es

- (A) $] -7, \frac{1}{3} [$
- (B) $] -\frac{1}{3}, 7 [$
- (C) $] -\infty, -7 [\cup] \frac{1}{3}, +\infty [$
- (D) $] -\infty, -\frac{1}{3} [\cup] 7, +\infty [$

35. Un intervalo donde f es estrictamente creciente corresponde a

(A) $\left] \frac{10}{3}, +\infty \right[$

(B) $\left] -\infty, \frac{242}{3} \right[$

(C) $\left] \frac{-1}{3}, 0 \right[$

(D) $\left] \frac{10}{3}, 7 \right[$

36. El vértice de f corresponde a

(A) $\left(\frac{-10}{3}, \frac{-242}{3} \right)$

(B) $\left(\frac{-10}{3}, \frac{242}{3} \right)$

(C) $\left(\frac{242}{3}, \frac{10}{3} \right)$

(D) $\left(\frac{10}{3}, \frac{242}{3} \right)$

37. Considere una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuyo vértice es el punto de coordenadas (m, n) donde $m > 0$ y $n < 0$. Entonces NO es posible que suceda

(A) $c > 0$ y $a > 0$

(B) $c < 0$ y $a < 0$

(C) $c = 0$ y $a > 0$

(D) $c = 0$ y $a < 0$

38. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = -5x^2 + kx - 1$ interseca una sola vez al eje x entonces k es cualquier número que pertenezca al siguiente conjunto

(A) $\{-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\}$

(B) $[-2\sqrt{5}, +\infty[$

(C) \mathbb{R}

(D) \emptyset

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
PROYECTO MATEM - 2009

Sábado 20 de junio de 2009
Segundo Examen Parcial
Tiempo Probable: 3 horas

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

CÓDIGO: _____

COLEGIO: _____

	Puntos obtenidos
Complete	
Desarrollo 1	
Desarrollo 2	
TOTAL	

SEGUNDA PARTE. COMPLETE (Valor 6 puntos)

Escriba en el espacio indicado lo que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. (1 punto cada una)

A. Considere el triángulo $\triangle ABC$ de vértices $A(2,-3)$, $B(4,7)$ y $C(-4,1)$. Conteste lo que se le solicita:

a) BC es igual a _____.

b) El punto medio de \overline{BC} es igual a _____.

c) La pendiente de la recta perpendicular a \overrightarrow{AC} que contiene a B corresponde a _____.

B. El valor de x en el punto de intersección de las rectas $-5x + 3y = -4$ y $\frac{2x-1}{3} = 4y$ corresponde a _____.

C. Considere $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$ y $g(x) = \frac{x-1}{x}$ definidas en su máximo dominio, entonces

a. El dominio de $g - f$ corresponde a _____.

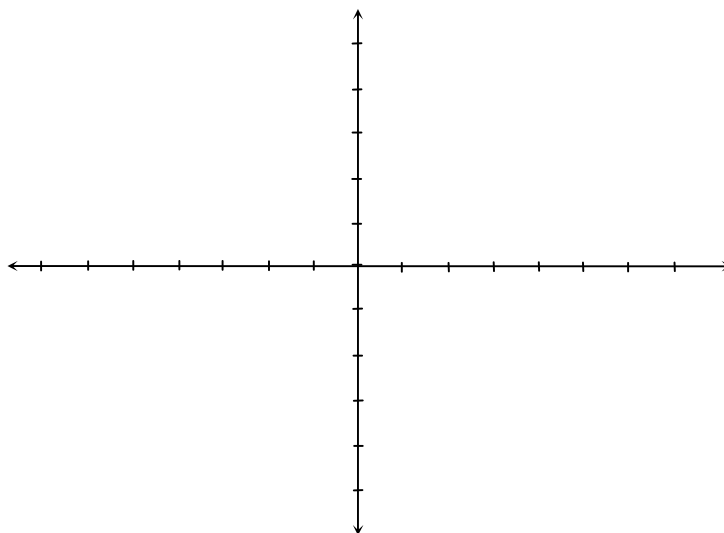
b. El dominio de $g \circ f$ corresponde a _____.

TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 10 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

A. Considere la función $f :]-\infty, 3] \rightarrow P$ definida por $f(x) = -(x-3)^2 + 4$. Suponga que es biyectiva.

- a. Determine el conjunto P . 1 punto.
- b. Calcule la inversa de f . 2 puntos.
- c. Grafique f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas. 2 puntos.



- B. Una empresa determinó que si cobra x colones por cada unidad de un producto P puede vender $(1600 - 2x)$ unidades de ese producto. Si cada unidad de ese producto le cuesta 200 colones a la empresa determine:
(5 puntos)
- a) La ganancia por unidad que obtiene la empresa, en términos de x .
 - b) La ganancia total que obtiene la empresa, en términos de x .
 - c) ¿Cuánto debe cobrar la empresa para obtener la ganancia máxima?
 - d) La ganancia máxima que puede obtener la empresa por la venta del producto P.