

Proyecto MATEM MA-0125 décimo año
Solución del II parcial 2009

1	B	21	A
2	C	22	D
3	D	23	B
4	C	24	B
5	B	25	D
6	C	26	A
7	B	27	A
8	D	28	D
9	D	29	D
10	C	30	B
11	D	31	C
12	C	32	C
13	D	33	D
14	B	34	B
15	C	35	C
16	A	36	D
17	B	37	D
18	A	38	A
19	A		
20	C		

SEGUNDA PARTE. COMPLETE (Valor 6 puntos)

Escriba en el espacio indicado lo que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. (1 punto cada una)

**A. Considere el triángulo ΔABC de vértices $A(2,-3)$, $B(4,7)$ y $C(-4,1)$.
Conteste lo que se le solicita:**

a) BC es igual a 10

$$BC = \sqrt{(-4-4)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

b) El punto medio de \overline{BC} es igual a $(0,4)$

$$M_{\overline{BC}} = \left(\frac{4+(-4)}{2}, \frac{7+1}{2} \right) = (0,4)$$

c) La pendiente de la recta perpendicular a \overrightarrow{AC} que contiene a B corresponde a $\frac{3}{2}$

$$m_{\overrightarrow{AC}} = \frac{1-3}{-4-2} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \text{pendiente de la recta perpendicular que contiene a } B \text{ es } \frac{3}{2}$$

B. El valor de x en el punto de intersección de las rectas $-5x+3y=-4$ y

$$\frac{2x-1}{3} = 4y \text{ corresponde a } \frac{5}{6}.$$

$$\checkmark \quad -5x+3y=-4 \Rightarrow y = \frac{-4+5x}{3}$$

$$\checkmark \quad \frac{2x-1}{3} = 4y \Rightarrow y = \frac{2x-1}{12}$$

$$\checkmark \quad \frac{-4+5x}{3} = \frac{2x-1}{12} \Rightarrow -16+20x = 2x-1$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

C. Considere $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$ y $g(x) = \frac{x-1}{x}$ definidas en su máximo dominio, entonces

a. El dominio de $g - f$ corresponde a $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$

$$\text{Como } D_f = \mathbb{R} - \{-3\} \text{ y } D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow D_{(g-f)} = D_g \cap D_f = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$$

b. El dominio de $g \circ f$ corresponde a $\mathbb{R} - \{-3, -1\}$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\}, \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{y} \quad D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

Entonces el dominio de la función $(g \circ f)(x)$ es el conjunto de todos los elementos x del dominio de f tales que $f(x)$ pertenece al dominio de g . es decir

$$D_{(g \circ f)} = \mathbb{R} - \{-3, -1\}$$

TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 10 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

**A. Considere la función $f :]-\infty, 3] \rightarrow P$ definida por $f(x) = -(x-3)^2 + 4$.
Suponga que es biyectiva.**

a. Determine el conjunto P .

1 punto.

El conjunto P debe ser igual a $]-\infty, 4]$

b. Calcule la inversa de f .

2 puntos.

$$y = -(x-3)^2 + 4$$

$$\Rightarrow y - 4 = -(x-3)^2$$

$$\Rightarrow -y + 4 = (x-3)^2$$

$$\Rightarrow |x-3| = \sqrt{-y+4} \text{ como } x \in]-\infty, 3] \text{ entonces } |x-3| = -x+3$$

$$\Rightarrow -x+3 = \sqrt{-y+4}$$

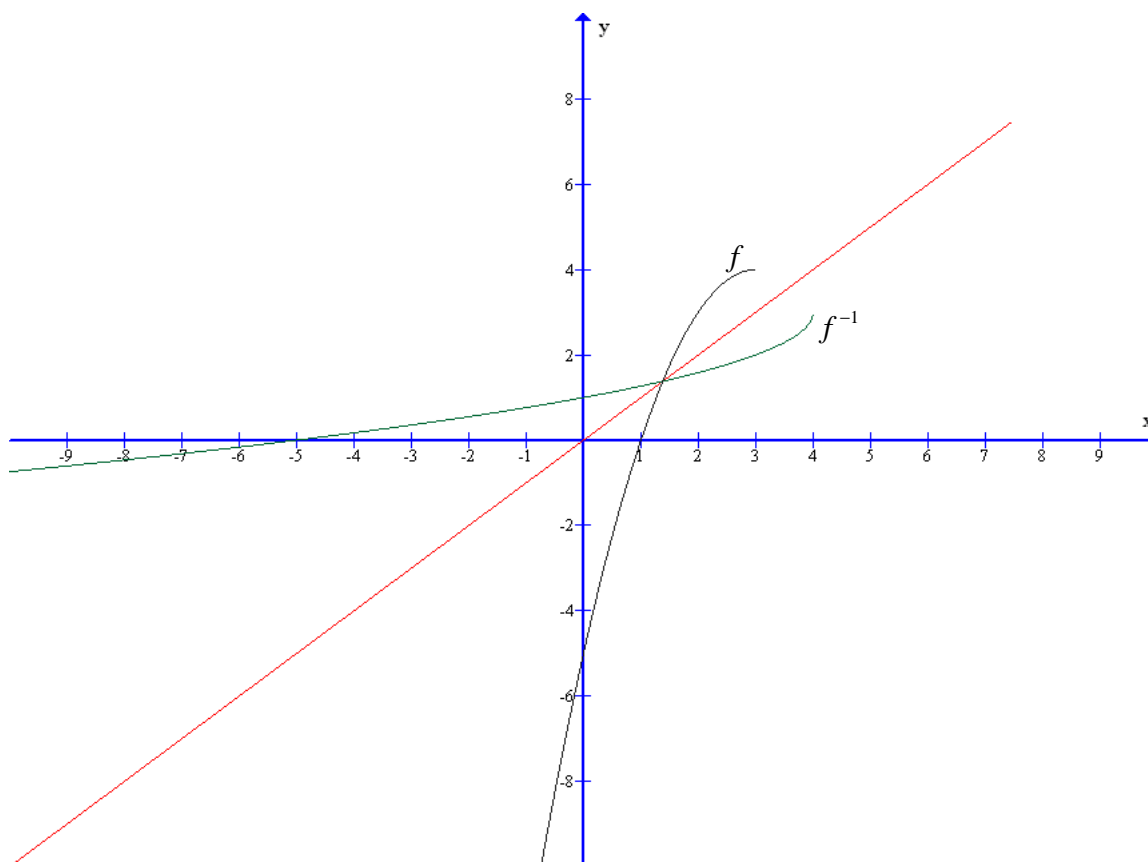
$$\Rightarrow x = 3 - \sqrt{-y+4}$$

Entonces la inversa de f es la función:

$$f^{-1} :]-\infty, 4] \rightarrow]-\infty, 3] \text{ con } f(x)^{-1} = 3 - \sqrt{-x+4}$$

c. Grafique f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas.

2 puntos.



B. Una empresa determinó que si cobra x colones por cada unidad de un producto P puede vender $(1600 - 2x)$ unidades de ese producto. Si cada unidad de ese producto le cuesta 200 colones a la empresa determine:

(5 puntos)

a) La ganancia por unidad que obtiene la empresa.

Si x es el cobro por unidad y 200 es el costo por unidad, entonces la ganancia por unidad es $x - 200$

b) La ganancia total que obtiene la empresa en términos de x .

Como $x - 200$ es la ganancia por unidad y $(1600 - 2x)$ es la cantidad de unidades, entonces la ganancia total es igual a $(x - 200)(1600 - 2x)$

Además: $(x - 200)(1600 - 2x) = -2x^2 + 2000x - 320000$

c) Cuanto debe cobrar la empresa, para obtener la ganancia máxima.

Se define la función $g :]200,800[\rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = -2x^2 + 2000x - 320000$

Se calcula el vértice para obtener el punto máximo:

$$\left. \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 2000 \\ c = -320\,000 \end{array} \right\} \Delta = (2000)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-320\,000) = 1\,440\,000$$

$$\text{Entonces } V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = \left(\frac{-2000}{-4}, \frac{-1\,440\,000}{-8} \right) = (500, 180\,000)$$

R/ La empresa debe cobrar 500 colones para obtener la ganancia máxima.

d) La ganancia máxima que puede obtener la empresa por la venta del producto P.

R/ La ganancia máxima que puede obtener la empresa por la venta del producto P es igual a 180 000 colones.