



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



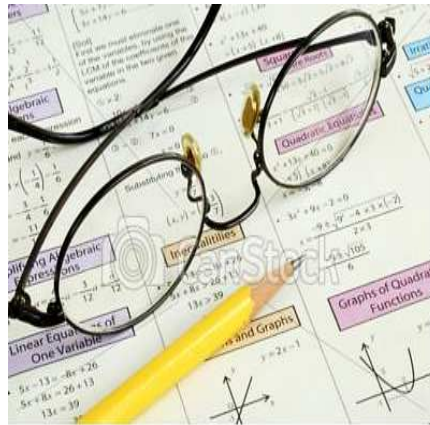
# PRECÁLCULO

-Décimo Año-

## II EXAMEN PARCIAL 2013

Nombre: \_\_\_\_\_ código: \_\_\_\_\_

Colegio: \_\_\_\_\_



**Fórmula**

**1**

Sábado 15 de junio de 2013

## **INSTRUCCIONES**

- (A) **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
- (B) Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
- (C) Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección única (34 puntos), la segunda es de respuesta breve (9 puntos) y la tercera es de desarrollo (20 puntos).
- (D) La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
- (E) En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
- (F) **En los ítems de selección, deberá rellenar con lápiz, en la hoja de respuestas, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
- (G) **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente tinta indeleble.
- (H) Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.
- (I) Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
- (J) **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

**PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 34 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. Dado el gráfico de  $f$ ,  $G_f = \{(-2,4), (-1,3), (0,2), (1,1), (2,2), (3,-1)\}$

De las siguientes proposiciones, ¿cuáles son verdaderas?

I. el dominio de  $f$  es el conjunto  $\{-1,1,2,3,4\}$

II. la imagen de  $-1$  es  $3$ .

III.  $2$  tiene solamente una preimagen.

(A) Solo I

(B) Solo II

(C) II y III

(D) I, II y III

2. Analice las siguientes relaciones :

$$f: \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = x^2$$

$$g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x-2}$$

¿Cuáles de las relaciones anteriores son funciones?

(A) sólo  $f$

(B) sólo  $g$

(C) ambas

(D) ninguna

3. Analice las siguientes funciones :

$$f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)^2$$

$$g : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}$$

¿Cuáles de las funciones anteriores son inyectivas?

- (A) Sólo  $f$
- (B) Sólo  $g$
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

4. Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = x^3 - x$ , entonces la expresión

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ corresponde a}$$

- (A)  $x^2 - xa + a^2$
- (B)  $x^2 + xa + a^2$
- (C)  $x^2 - xa + a^2 + 1$
- (D)  $x^2 + xa + a^2 - 1$

5. Considere una función cuyo criterio es  $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < -4 \\ |x+3| & \text{si } -4 \leq x < 6 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 6 \end{cases}$

entonces  $f(-5) - f(5) \cdot f(8)$  es igual a

- (A) -2
- (B) 5
- (C) -5
- (D) 2

6. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 - a^2x + 2$ . Si  $(-2, 0)$  pertenece al gráfico de la función  $f$  entonces un posible valor de  $a$  es igual a

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 1
- (D) 2

7. Si  $m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función lineal, tal que  $m(1) = -2$  y  $m(0) = -1$ , entonces, con certeza la función  $m$  es

- (A) constante y biyectiva
- (B) decreciente y biyectiva
- (C) creciente y no sobreyectiva
- (D) decreciente y no sobreyectiva

8. El dominio máximo de la función  $f$  de criterio  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{8-2x}}{x(-2x+1)}$  corresponde a

- (A)  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
- (B)  $\mathbb{R} - \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$
- (C)  $]-\infty, 4] - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
- (D)  $]-\infty, 4] - \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$

9. El dominio máximo de la función  $g$  de criterio  $g(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{3}-\sqrt{x+1}}$  corresponde a

- (A)  $\mathbb{R} - \{1, 2\sqrt{3}\}$
- (B)  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- (C)  $[-1, +\infty[ - \{1\}$
- (D)  $] -1, +\infty[ - \{2\sqrt{3}\}$

10. Una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(-7) = f(7)$  entonces con certeza puede asegurarse que  $f$  es una función

- (A) lineal
- (B) constante
- (C) no inyectiva
- (D) no sobreyectiva

11. Considere la función  $f: A \rightarrow ]-\infty, 1]$ , con  $f(x) = -x^2 + 1$ . Para que  $f$  sea inyectiva,  $A$  puede ser igual a

- (A)  $\mathbb{R}$
- (B)  $] -\infty, 0]$
- (C)  $] -\infty, 1]$
- (D)  $] -\infty, 1[$

12. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -(x-1)^2 - 9$  entonces con certeza se cumple:

- (A) el ámbito de  $f$  es  $]-\infty, -9]$
- (B)  $f$  es creciente en el intervalo  $[0, +\infty[$
- (C) la intersección con el eje Y es el punto  $(9, 0)$
- (D) la gráfica de  $f$  interseca al eje X en dos puntos

13. Considere las funciones  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$  definidas en su máximo dominio.

Una función  $m$  que tiene por dominio máximo al intervalo  $[-1, +\infty[$  corresponde a  $m(x) =$

- (A)  $f(x+1)$
- (B)  $g(x+1)$
- (C)  $f(x-1)$
- (D)  $g(x-1)$

14. Si  $f$  es una función biyectiva de dominio  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  tal que  $f(x) = \frac{6x}{2x-1}$ , entonces

$f^{-1}(-3)$  es igual a

- (A)  $-\frac{1}{4}$
- (B)  $-3$
- (C)  $\frac{1}{4}$
- (D)  $\frac{18}{7}$

15. Si  $f$  es biyectiva con criterio  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{5}$ , entonces el criterio de  $f^{-1}$  corresponde a

(A)  $f^{-1}(x) = 5x^2 - 1$

(B)  $f^{-1}(x) = \frac{5}{\sqrt{x+1}}$

(C)  $f^{-1}(x) = 25x^2 - 1$

(D)  $f^{-1}(x) = 1 - 25x^2$

16. Considere las funciones  $f$  y  $g$  definidas en su respectivo dominio máximo, tales que

$f(x) = x + 1$  y  $g(x) = x^2 - 1$ . La función  $\frac{f}{g}$  tiene como dominio máximo al conjunto

(A)  $\mathbb{R}$

(B)  $\mathbb{R} - \{1\}$

(C)  $\mathbb{R} - \{-1\}$

(D)  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

17. Considere las funciones  $f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{-x} - x$  y  $g: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -x^2$ , entonces  $(f \circ g)(x)$  es igual a

(A)  $x^2 + x$

(B)  $x^2 - x$

(C)  $-(\sqrt{x} + x)$

(D)  $-(\sqrt{-x} - x)^2$



18. Si  $f$  y  $g$  son funciones definidas en su dominio máximo tales que  $(g \circ f)(x) = (x-1)^2 + 5x - 5$  y  $f(x) = x-1$ , entonces  $g(x)$  es igual a

- (A)  $x^2 + 5x$
- (B)  $5x - 1$
- (C)  $5x - 5$
- (D)  $x^2 - 1$

19. Si  $g$  es una función con dominio  $[-3, 5[$  y criterio  $g(x) = -2x - 5$ , entonces su rango es

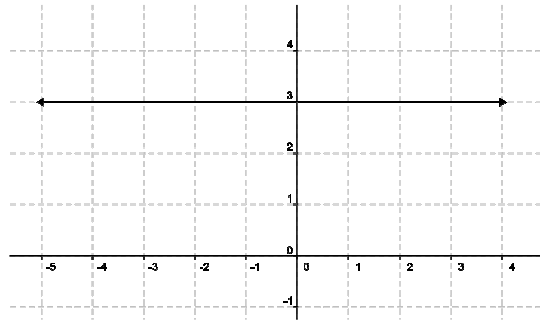
- (A)  $[-15, 1[$
- (B)  $] -15, 1]$
- (C)  $[-5, 2[$
- (D)  $] -5, 2]$

20. Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función lineal tal que  $f(2) = -1$  y  $f^{-1}(4) = 5$  entonces el criterio de  $f$  está dado por

- (A)  $f(x) = x + 9$
- (B)  $f(x) = x - 1$
- (C)  $f(x) = \frac{5x - 13}{3}$
- (D)  $f(x) = \frac{-5x + 13}{3}$

21. La función lineal  $f(x) = mx + b$ , representada en la figura cumple que:

- (A)  $m < 0$ ,  $b < 0$
- (B)  $m = 0$ ,  $b < 0$
- (C)  $m = 0$ ,  $b > 0$
- (D)  $m > 0$ ,  $b < 0$



22. Considere ,  $f(x) = \frac{-7x+3}{2}$ , entonces las intersecciones de la gráfica de  $f$  con los ejes están dadas por

- (A)  $\left(\frac{3}{7}, 0\right)$  y  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$
- (B)  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  y  $\left(0, \frac{3}{7}\right)$
- (C)  $\left(\frac{1}{7}, 0\right)$  y  $\left(0, \frac{3}{7}\right)$
- (D)  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  y  $\left(0, \frac{1}{7}\right)$

23. Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (3 + 2a - a^2)x + 3$  es una función lineal creciente, entonces el valor de  $a$  puede ser cualquier elemento del siguiente conjunto

- (A)  $\{ \}$
- (B)  $] -1, 3 ]$
- (C)  $] -1, 3 [$
- (D)  $] -\infty, -1 [ \cup ] 3, +\infty [$

24. Considere los puntos A  $(-2,-1)$  y B  $(2,2)$  vértices consecutivos de un cuadrado, entonces su perímetro es igual a

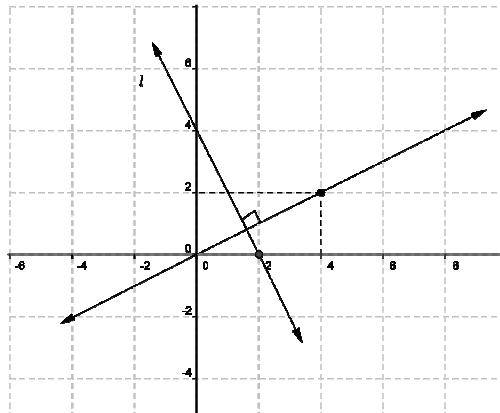
- (A) 5
- (B) 8
- (C) 25
- (D) 20

25. La ecuación que define la recta que pasa por  $(-1,2)$  y es paralela a la recta de ecuación  $5x+3y=4$  es igual a

- (A)  $5y+3x=1$
- (B)  $11y-5x=1$
- (C)  $3y+5x=1$
- (D)  $3y+11x=1$

26. Considerando la siguiente gráfica, la ecuación de la recta  $\ell$  es igual a

- (A)  $y+2x=2$
- (B)  $2y-x=-2$
- (C)  $y+2x=4$
- (D)  $y-2x=-4$



27. Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas de ecuación  $y = -3x + 5$  y  $2x - 5y = 9$ , es igual a

- (A)  $(2, -1)$
- (B)  $(-1, 2)$
- (C)  $(2, 11)$
- (D)  $(11, 2)$

28. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función cuadrática, con  $a < 0$ , cuyo vértice es  $(0, -2)$ . De las siguientes proposiciones,

- I.  $f(-1) = f(1)$
- II. interseca al eje X en dos puntos.

¿cuáles son verdaderas?

- (A) solo II
- (B) I y II
- (C) solo I
- (D) ninguna

29. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = -4x - x^2 - 3$ , entonces  $f(x) < 0$

en el siguiente conjunto

- (A)  $[-1, 3]$
- (B)  $[-3, -1]$
- (C)  $]-\infty, 1] \cup ]3, +\infty[$
- (D)  $]-\infty, -3[ \cup ]-1, +\infty[$

30. Si el vértice de  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + 6$  es  $(-1, 4)$  entonces el valor de  $a$  puede ser

- (A) 2
- (B) -2
- (C)  $\frac{2}{3}$
- (D)  $\frac{-2}{3}$

31. Sea  $f: [0, +\infty[ \rightarrow [-1, +\infty[$  con  $f(x) = 2x^2 - 1$ . Si  $-1 < a < 1$  entonces  $f^{-1}(a)$  pertenece al intervalo

- (A)  $[0, 1[$
- (B)  $]0, 1[$
- (C)  $[1, +\infty[$
- (D)  $] -\infty, -1]$

32. Si la gráfica  $y = (a + 4)x^2 - 3$  es cóncava hacia abajo, entonces el valor de " $a$ " debe pertenecer al conjunto

- (A)  $[3, 4]$
- (B)  $] -4, -3]$
- (C)  $[4, +\infty[$
- (D)  $] -\infty, -4[$

33. Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 6x - 18$  entonces  $f$  es creciente en el intervalo
- (A)  $]-\infty, 3[$
  - (B)  $]3, +\infty[$
  - (C)  $]-\infty, -27[$
  - (D)  $]-27, +\infty[$
34. El desplazamiento de un objeto desde un punto de referencia en el tiempo  $t$  está dado por  $s = 3,2t^2 - 16t + 28,7$ , donde  $s$  está dado en metros y  $t$  en segundos.  
¿Cuál es el desplazamiento mínimo aproximado del objeto medido a partir del punto de referencia?
- (A) 2,5
  - (B) 5
  - (C) 8,7
  - (D) 623,36

*Fin de la primera parte*



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica

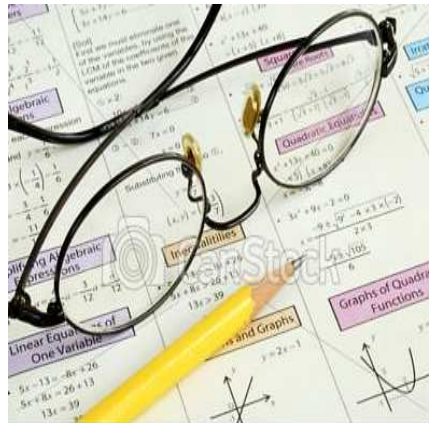


**SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 2013 - Sábado 15 de junio**

Nombre completo: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

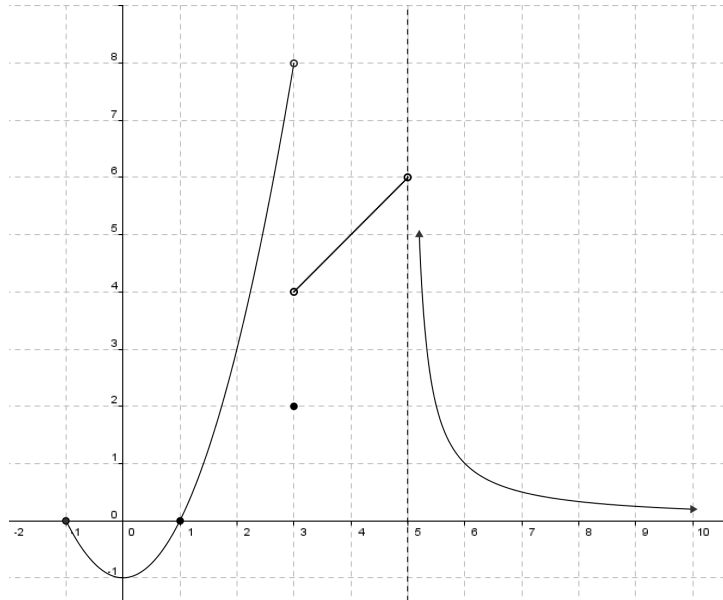
COLEGIO: \_\_\_\_\_

PREGUNTA	Puntos obtenidos
AG	
D1	
D2	
<b>TOTAL</b>	



**SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA (Valor 9 puntos)**

A continuación se le presenta la gráfica de una función  $f$ , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



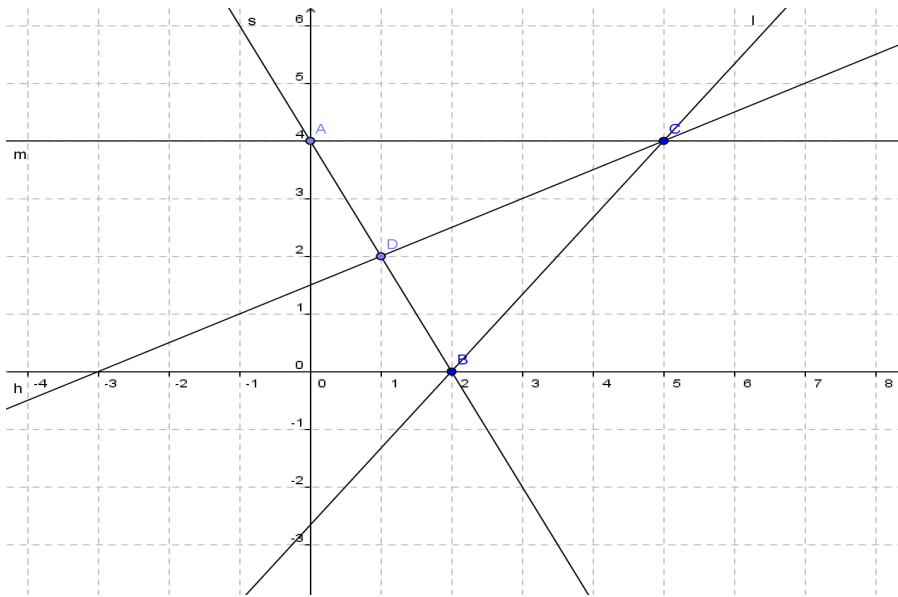
- El dominio de  $f$  es igual a \_\_\_\_\_
- El ámbito de  $f$  es igual a \_\_\_\_\_
- El conjunto solución de la inecuación  $f(x) \geq 0$  corresponde a \_\_\_\_\_
- El conjunto solución de la inecuación  $f(x) < 0$  corresponde a \_\_\_\_\_
- Un intervalo donde  $f$  es decreciente corresponde a \_\_\_\_\_
- La cantidad de cortes de la gráfica de  $f$  con el eje  $X$  corresponde a \_\_\_\_\_
- La cantidad de preimágenes de 5 es igual a \_\_\_\_\_
- La imagen de 3 es igual a \_\_\_\_\_
- El resultado de  $f(-1) - f(0) \cdot f(2)$  es igual a \_\_\_\_\_



**TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 20 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. Considere el  $\triangle ABC$  cuyos vértices son los puntos  $A(0,4)$ ,  $B(2,0)$  y  $C(5,4)$ .



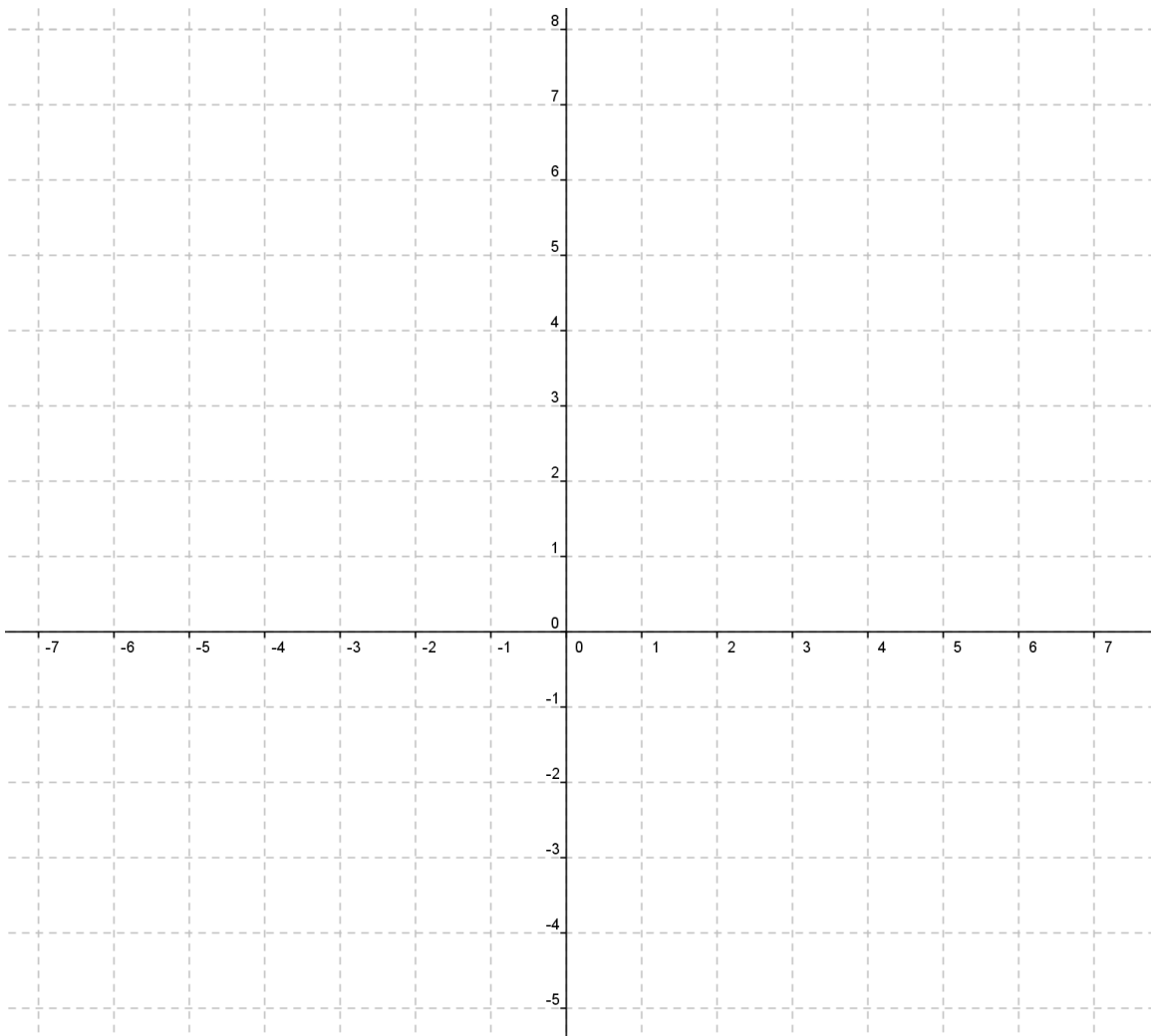
- a) Demuestre que el triángulo ACB es isósceles. (4puntos)

- b) Determine la ecuación de la mediatriz sobre  $\overline{AB}$ . (4 puntos)

2) Dadas las siguientes funciones:

$$f : ]1, +\infty[ \rightarrow ]-2, +\infty[ \quad f(x) = (x-1)^2 - 2 \quad \text{y} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = -3x + 1$$

a) Trace la gráfica de  $f$  y  $g$  en el plano cartesiano que se le proporciona.  
(5 puntos)



- b) Determine el par ordenado del punto de intersección de las gráficas de  $f$  y  $g$ . Indíquelo en la gráfica. (3 puntos)

- c) Determine la función inversa de  $f$  y compruebe  $(f \circ f^{-1})(x) = x$

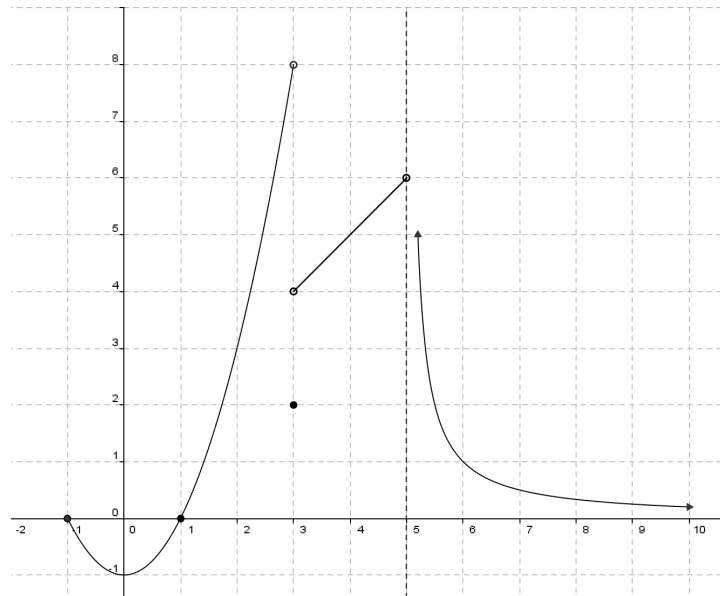
(4 puntos)

SOLUCIONARIOSelección única

1	B		8	B		15	C		22	A		29	D	
2	A		9	C		16	D		23	C		30	A	
3	C		10	C		17	B		24	D		31	B	
4	D		11	B		18	A		25	C		32	D	
5	B		12	A		19	B		26	C		33	B	
6	B		13	A		20	C		27	A		34	C	
7	D		14	C		21	C		28	C				

## SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA (Valor 9 puntos)

A continuación se le presenta la gráfica de una función  $f$ , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.

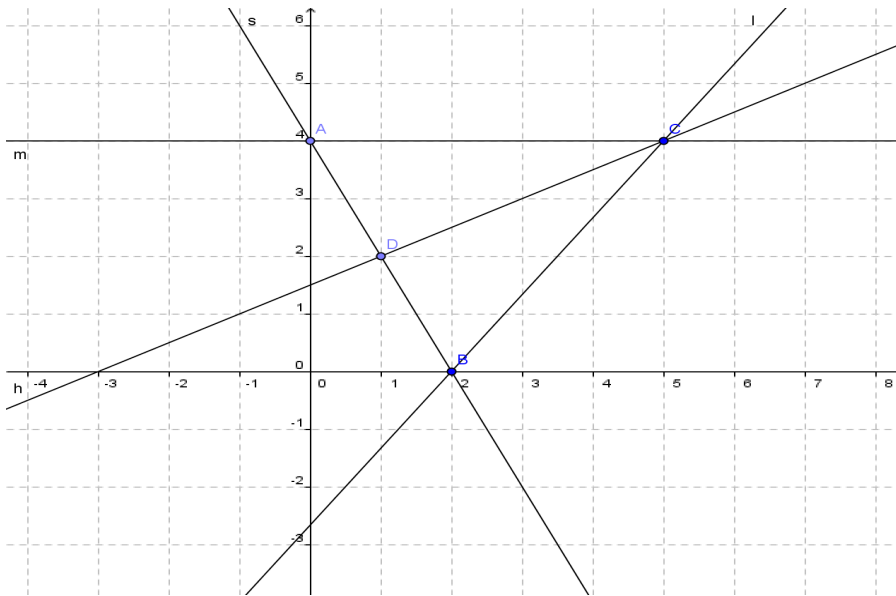


- El dominio de  $f$  es igual a  $[-1, \infty[ - \{5\}$
- El ámbito de  $f$  es igual a  $[-1, \infty[$
- El conjunto solución de la inecuación  $f(x) \geq 0$  corresponde a  $[1, \infty[ \cup \{-1\} - \{5\}$
- El conjunto solución de la inecuación  $f(x) < 0$  corresponde a  $] -1, 1[$
- Un intervalo donde  $f$  es decreciente corresponde a  $]5, +\infty[$  u otro intervalo
- La cantidad de cortes de la gráfica de  $f$  con el eje  $X$  corresponde a 2
- La cantidad de preimágenes de 5 es igual a 3
- La imagen de 3 es igual a 2
- El resultado de  $f(-1) - f(0) \cdot f(2)$  es igual a 3

**TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 20 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

- j) Considere el  $\triangle ABC$  cuyos vértices son los puntos  $A(0,4)$ ,  $B(2,0)$  y  $C(5,4)$ .



Demuestre que el triángulo  $ACB$  es isósceles

(4 puntos)

$$d(A,C) = \sqrt{(4-0)^2 + (5-0)^2} = 5$$

$$d(B,C) = \sqrt{(4-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Determine la ecuación de la mediatriz sobre  $\overline{AB}$ .

(4 puntos)

$$m_{\overline{AB}} = -2 \quad M(A,B) = (1,2)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

2) Dadas las siguientes funciones:

$$f : ]1, +\infty[ \rightarrow ]-2, +\infty[ \quad f(x) = (x-1)^2 - 2 \qquad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = -3x + 1$$

- Grafique  $f$  y  $g$  en el plano cartesiano que se le proporciona. (5 puntos)
- Determine el par ordenado del punto de intersección de las gráficas de  $f$  y  $g$ . Indíquelo en la gráfica. (3 puntos)

$$(x-1)^2 - 2 = -3x + 1$$

$$x = -2 \quad \text{y} \quad x = 1 \quad \text{pero ninguno está en el dominio}$$

Por lo tanto no hay intersección

- Determine la función inversa de  $f$  y compruebe  $(f \circ f^{-1})(x) = x$  (4 puntos)

$$f^{-1} : ]-2, +\infty[ \rightarrow [1, +\infty[ \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} + 1$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = (\sqrt{x+2} + 1 - 1)^2 - 2 = x$$

