Número de examen: _________________

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO MATEM
-Matemática en la Enseñanza Media-

II EXAMEN PARCIAL 2008

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
-Décimo Año-

FÓRMULA 1

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO MATEM - 2008
MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
NIVEL: DÉCIMO AÑO

Sábado 21 de junio de 2008
Primer Examen Parcial
Tiempo Probable: 3 horas

INSTRUCCIONES

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
- Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección y está constituida por 40 ítems; y la segunda es de desarrollo y la conforman 4 ítems.
- El examen debe ser contestado en las hojas de respuestas que se le darán para tal efecto.
- En cada una de las hojas de respuesta debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
- Utilice únicamente bolígrafo azul o negro. Si el **examen contiene** partes escritas con **lápiz** usted **pierde el derecho a reclamar**.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.
- **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **solo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
- **En los ítems de desarrollo, debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos.
- Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
- **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. DE SELECCIÓN ÚNICA (Valor 35 puntos)

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, solo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. Considere las relaciones siguientes

I) $f : IR \to IR,\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

II) $g : IR \to IR,\ g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

De las relaciones dadas anteriormente, se puede afirmar que son funciones

(A) solamente la I
(B) solamente la II
(C) la I y la II.
(D) ni la I ni la II.

2. Si $f : IR - \left\{\frac{2}{3}\right\} \longrightarrow IR - \{0\}$ y $f(x) = \dfrac{5}{3x-2}$ entonces $f^{-1}(x)$ es igual a

(A) $\dfrac{15}{x+6}$

(B) $\dfrac{7}{3x}$

(C) $\dfrac{3x+2}{5}$

(D) $\dfrac{5+2x}{3x}$

3. Si f es una función biyectiva, f: A B entonces considere las siguientes afirmaciones:

I. Si $f^{-1}(m) = n$ entonces n es un elemento de B.
II. Si (a, b) es un elemento del gráfico de f^{-1} entonces f (b) = a
III. $f^{-1}(f(c))$ es un elemento de A

De ellas son verdaderas

(A) I y II solamente
(B) I y III solamente
(C) II y III solamente
(D) I, II y III

4. El máximo dominio real de la función $f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x-2}-1}$ es

(A) IR – {2,3}
(B) [2 , + [
(C) [2,3 [ ] 3 , + [
(D) [2 , + [- {3,5}

5. Considere las siguientes funciones

$$f: IR \longrightarrow IR \qquad con \qquad f(x)=2x$$
$$g: IN \longrightarrow IN \qquad con \qquad g(x)=x^2$$
$$h: [-2,2] \longrightarrow IR \qquad con \qquad h(x)=x^4$$

De las anteriores funciones, son inyectivas

(A) la f y la g
(B) la g y la h
(C) la f y la h
(D) todas

6. Si $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & \text{si } x \in [2,+\infty[\\ |x-5| & \text{si } x \in]-\infty,2[\end{cases}$ y h es un número real cualquiera entonces $f(-h^2)$ es igual a

(A) $h^4 + 3h$
(B) $h^4 - 3h$
(C) $h^2 + 5$
(D) $-h^2 - 5$

7. Si el par ordenado (2, 4) pertenece al gráfico de la función $f(x)=\dfrac{ax-2}{x^2-a}$ entonces el valor de $\boldsymbol{a}$ es

(A) 3
(B) $\dfrac{7}{6}$
(C) -3
(D) $-\dfrac{11}{6}$

8. Considere las funciones $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$ y $g(x)=\sqrt{x}+1$. Si $f(x)=(hog)(x)$ entonces la función h(x) está dada por

(A) $h(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$

(B) $h(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$

(C) $h(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}+1}$

(D) $h(x) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+1}-3}{\sqrt{\sqrt{x}+1}+2}$

9. Si la gráfica de la función *f* es una parábola cóncava hacia abajo, cuyo eje de simetría es la recta de ecuación $x = 4$, analice las siguientes afirmaciones

I. $f(4) \quad f(3)$
II $f(5) = f(3)$
III $f(2) \quad f(3)$

De ellas son verdaderas

(A) I y II únicamente
(B) II y III únicamente
(C) I y III únicamente
(D) I, II y III.

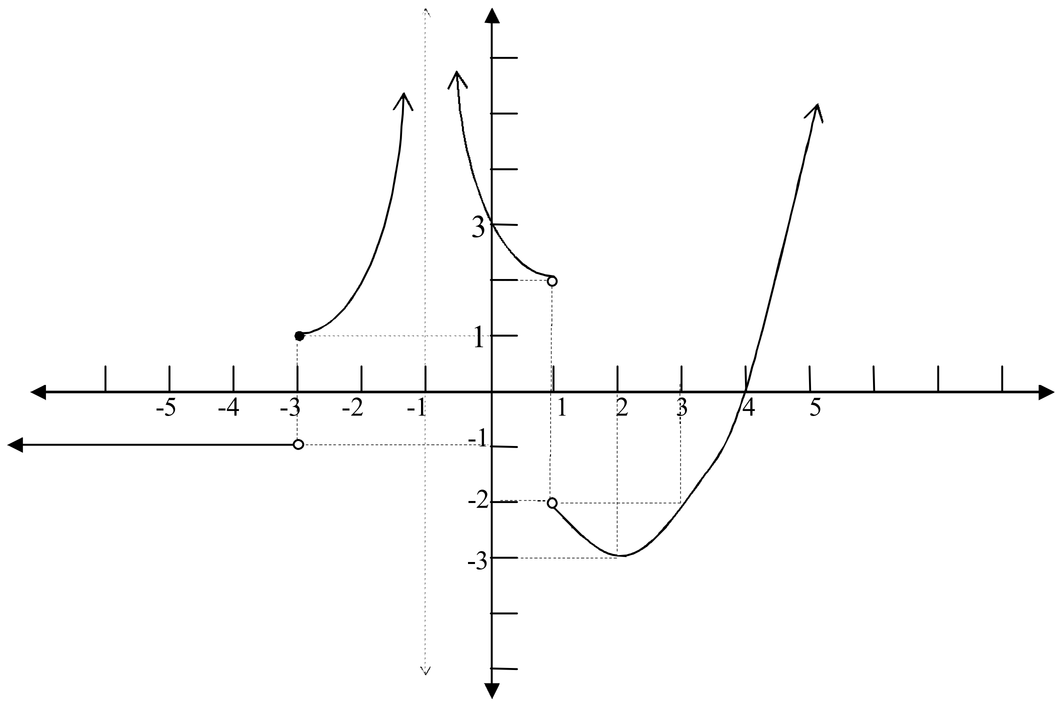
10. Si $f: A \to B$ es una función biyectiva, considere las siguientes afirmaciones:

I. Todo elemento de A tiene una única imagen.
II. Todo elemento de B tiene una única preimagen.

Se puede asegurar que son verdaderas:

(A) solamente I
(B) solamente II
(C) la I y la II.
(D) ni la I ni la II.

Para responder los ítems del 11 al 14 utilice la siguiente gráfica de la función $f: D \to A$



11. Para que $f: D \to A$ sea sobreyectiva, el conjunto A debe ser

(A) IR

(B) $\left[-3,+\infty\right[$

(C) $\left[-3,+\infty\right[- \{-2,-1,2\}$

(D) $\left[-3,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[$

12. El conjunto solución de $f(x) \leq -2$ es

(A) $\left[1,3\right]$

(B) $\left]1,3\right]$

(C) $\left[1,3\right[$

(D) $\left]1,3\right[$

13. Un intervalo donde f es creciente es

(A) $\left[3,5\right]$
(B) $\left]1,10\right]$

(C) $\left[1,+\infty\right[$
(D) $\left[\frac{3}{2},4\right]$

14. El valor de $\dfrac{f(0)\,f(4) - f(3)\,f(-3)}{f(-5)}$ es

(A) -2

(B) -1

(C) 1

(D) 2

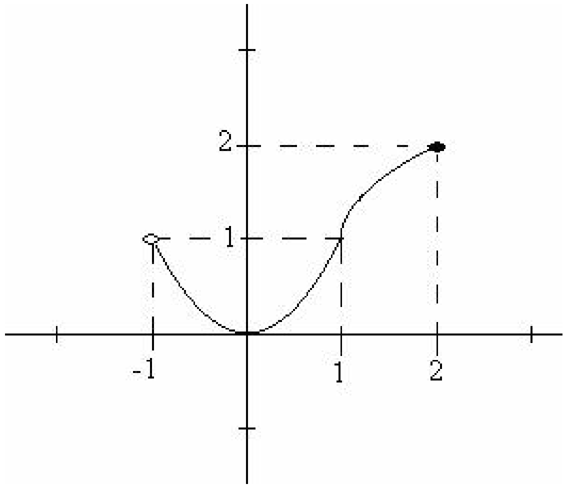
15. Si f es una función sobreyectiva pero **no** inyectiva, tal que a y b son los únicos elementos de su dominio. Analice las siguientes afirmaciones:

I. $f(a) = f(b)$.
II. Únicamente hay dos elementos en el codominio de f.

De ellas, son verdaderas

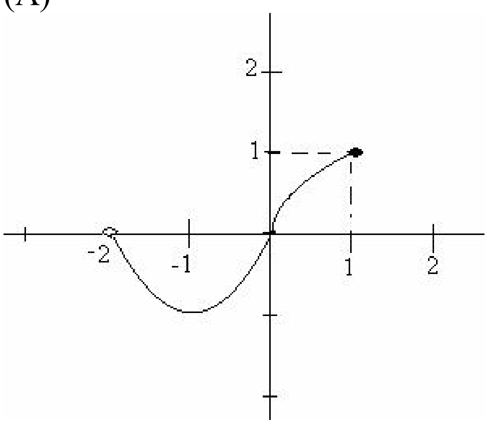
(A) solamente I.
(B) solamente II.
(C) la I y la II.
(D) ni la I ni la II.

16. Considere la gráfica de la función $f:\left]-1,2\right]\rightarrow IR$ que se da a continuación

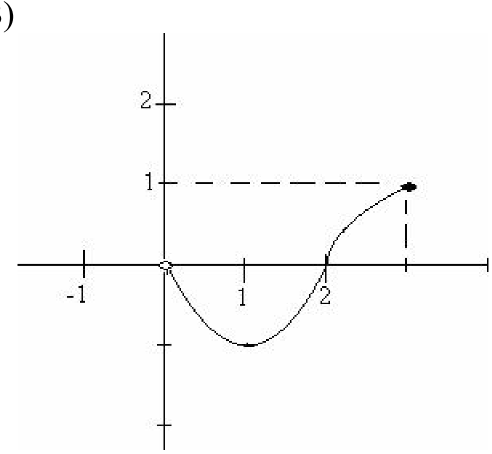


Con base en la gráfica de f podemos afirmar que la gráfica de la función $g(x)= f(x+1)-1$ corresponde a

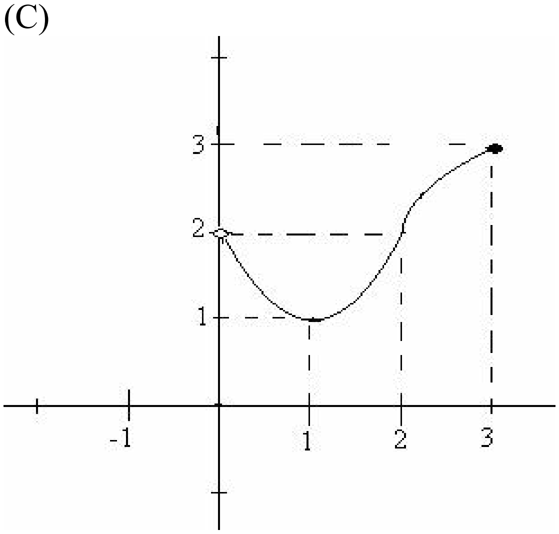
(A)



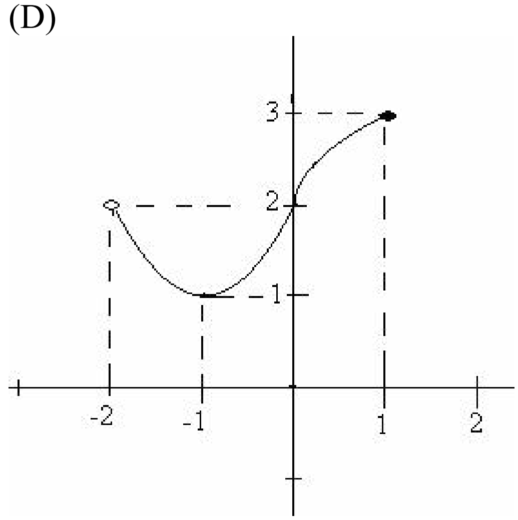
(B)



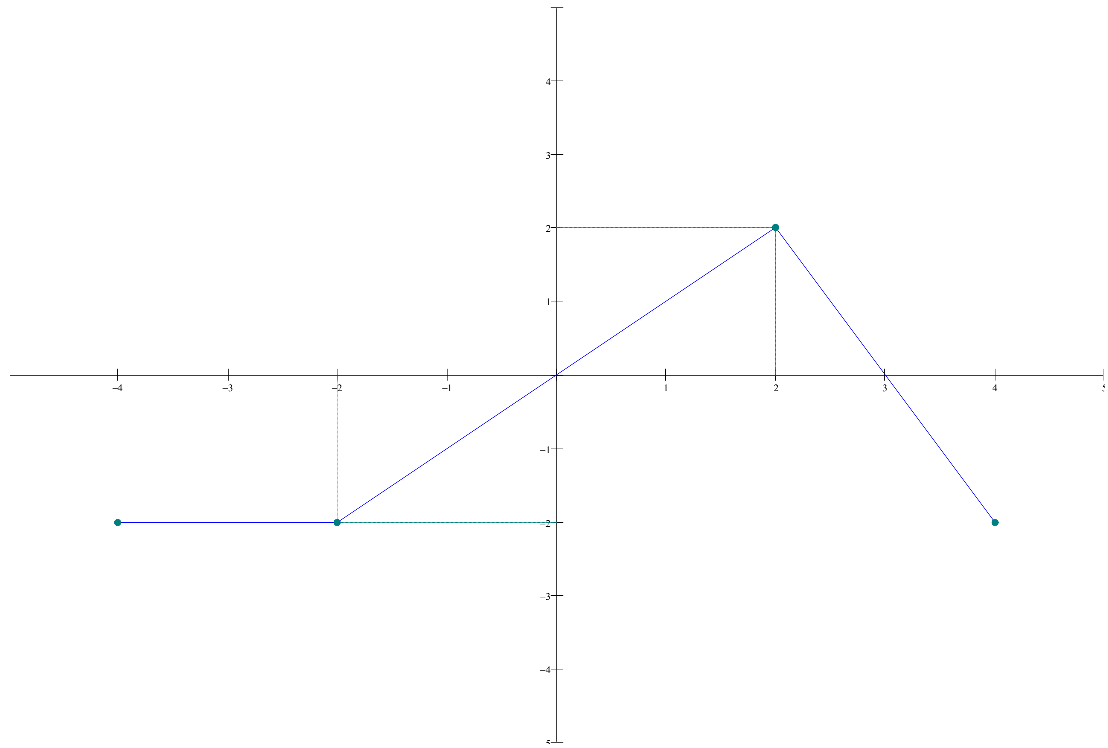
(C)



(D)



Para contestar los ítems 17, 18 y 19 refiérase a la función f de la gráfica que se da a continuación:



17. Si $g(x) = -f(x+2)+1$ entonces $g(-2)$ es igual a

(A) 3
(B) 1
(C) -1
(D) -2

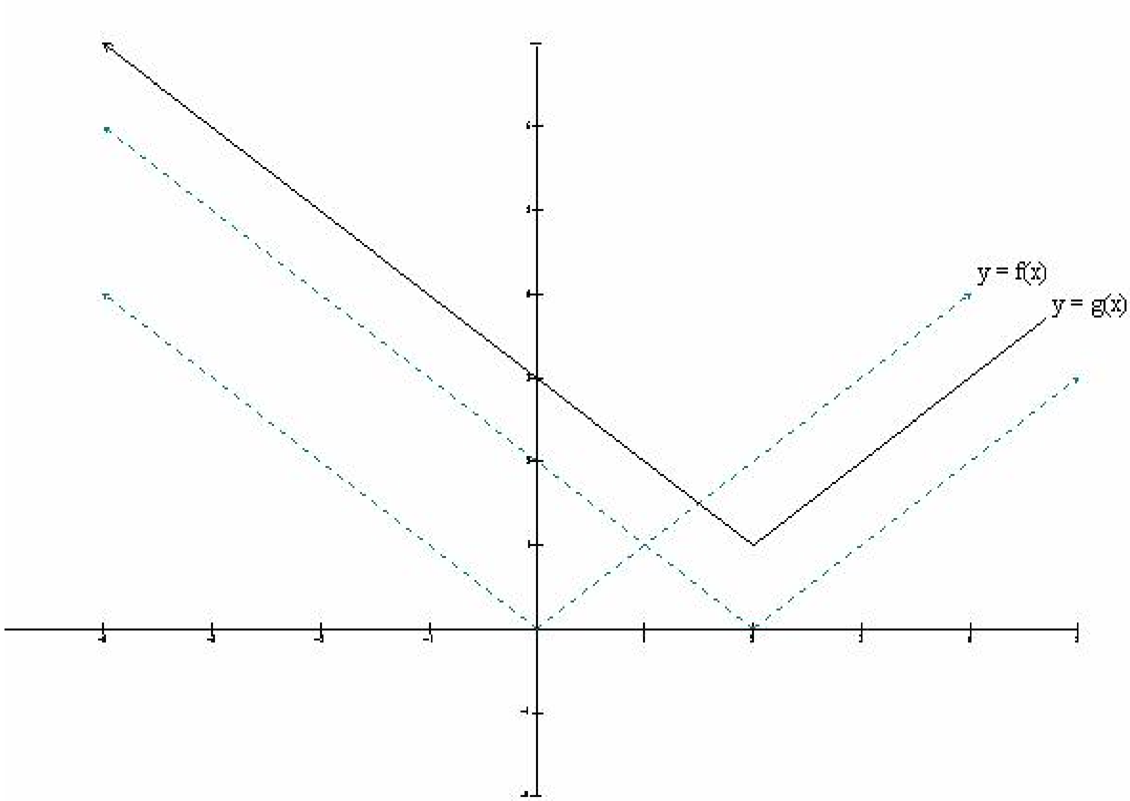
18. Si $h(x) = f(x-2)$ entonces el dominio máximo de h es

(A) $[-4,4]$
(B) $[-6,2]$
(C) $[-2,6]$
(D) $[-4,0]$

19. Si $t(x) = -f(x)+1$ entonces el rango de t es

(A) $[-3,5]$
(B) $[-3,1]$
(C) $[-1,3]$
(D) $[-2,2]$

20. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$ y la siguiente gráfica:



Se puede afirmar que $g(x)$ es igual a

(A) $f(x-2)+1$

(B) $f(x+2)+1$

(C) $f(x-1)+2$

(D) $f(x+1)+2$

21. La ecuación de una recta perpendicular a la recta que contiene a los puntos de coordenadas $\left(\frac{7}{3},\frac{3}{2}\right)$ y $\left(-\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\right)$ es

(A) $y + 2x = 3$
(B) $y - 2x = 7$
(C) $2y - x = 4$
(D) $2y + x = 0$

22. Considere el triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas A(-2,1), B(2,5) y C(4,-1). La ecuación de la mediana al lado $\overline{AB}$ es

(A) $y = -x + 3$
(B) $y = x + 3$
(C) $y = \dfrac{x+6}{2}$
(D) $y = \dfrac{-x}{2} + 3$

23. Una recta cuya inclinación es de 45º con respecto al eje *x*, tiene una pendiente igual a

(A) $\dfrac{1}{2}$
(B) $\sqrt{3}$
(C) 1
(D) -1

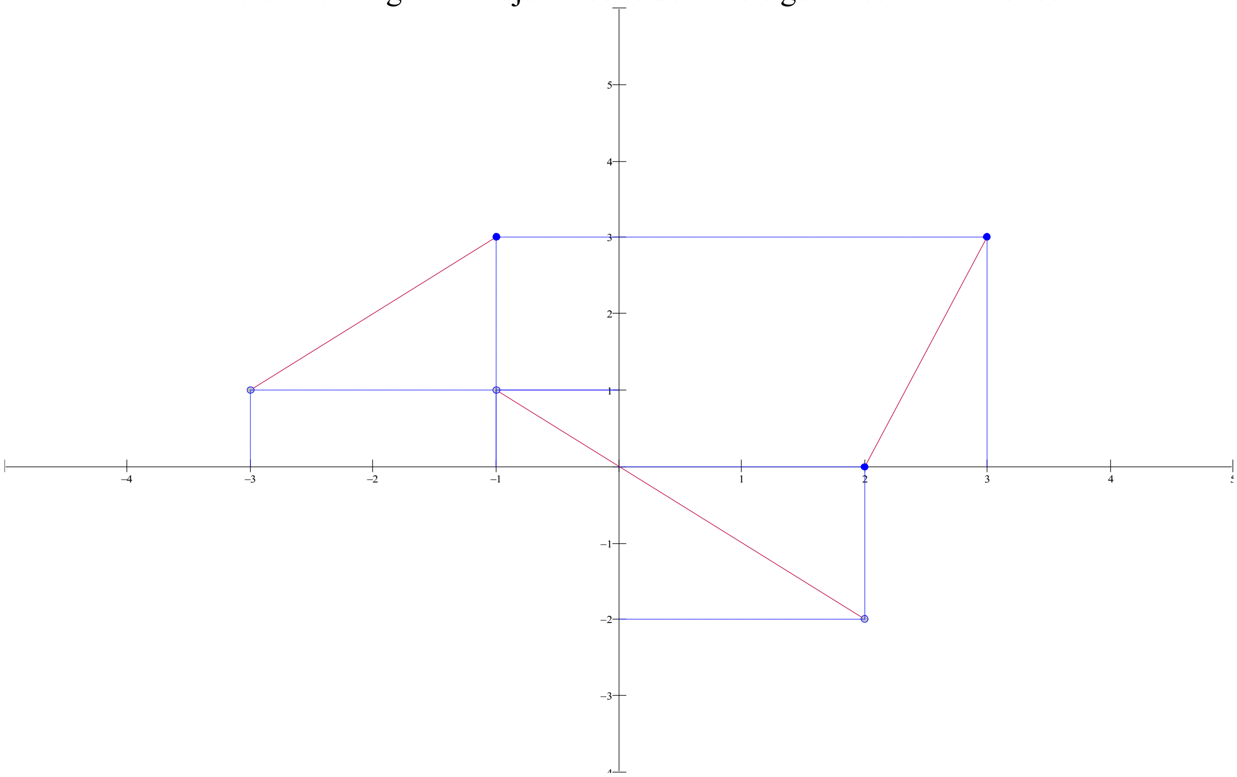
24. Si $f(x) = (-3a-6)x + 8$ es una función decreciente entonces se cumple con certeza que " a " pertenece al siguiente conjunto

(A) $]-\infty, 2[$
(B) $]-\infty, -2[$
(C) $]2, +\infty[$
(D) $]-2, +\infty[$

25. La ecuación que define una recta que interseca a los ejes en (5,0) y (0,2) es la siguiente

(A) $y = 5x + 2$
(B) $y = \dfrac{2x+10}{5}$
(C) $y = \dfrac{-2x+10}{5}$
(D) $y = \dfrac{-2}{5}x + 5$

26. Para la función f de la gráfica adjunta considere las siguientes afirmaciones:



I. Si $g:]-1,2[\to]-2,1[$, $g(x) = f(x)$ entonces g es biyectiva.

II. Si $t:]-3,-1] \to [-2,3]$, $t(x) = f(x)$ entonces t tiene inversa.

III. Si $h: [2,3] \to [0,3]$, $h(x) = f(x)$ entonces $h^{-1}(0) = 2$

De ellas, son verdaderas

(A) solamente I y II
(B) solamente I y III
(C) solamente II y III
(D) I, II y III

27. Las rectas definidas por $5x + 3y = 4$ y $7x + ky = 1$ son paralelas si k es igual a

(A) $\dfrac{-5}{3}$

(B) $\dfrac{-35}{3}$

(C) $\dfrac{21}{5}$

(D) $\dfrac{35}{3}$

28. ¿Cuál es el punto de intersección de las rectas definidas por las ecuaciones $x = \frac{y+1}{4}$ y $6x - 1 = 2y$?

(A) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(B) $\left(\frac{3}{4}, 2\right)$

(C) $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

(D) $\left(\frac{-1}{2}, -3\right)$

29. La gráfica de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = mx + b$, a cuya gráfica pertenecen los puntos de coordenadas (–2, 3) y $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ interseca el eje "y" en

(A) (0, 3)
(B) (3, 0)
(C) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$
(D) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

30. Si la gráfica de una función f es el segmento cuyos extremos son los puntos de coordenadas (–2, 1) y (4, –1), considere las siguientes proposiciones:

I. f es creciente.
II. El ámbito de f es $\{1, -1\}$.

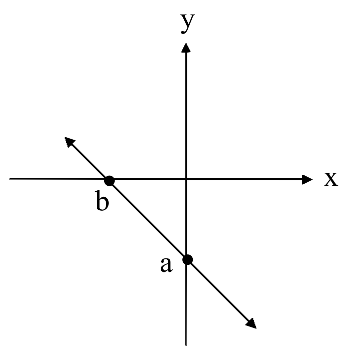
¿Cuáles de ellas son **verdaderas**?

(A) Ambas.
(B) Ninguna.
(C) Solo la I.
(D) Solo la II.

31. Si el ámbito de la función $f(x)=4x+1$ es $]\,1, 21]$ entonces su dominio es

(A) IR
(B) $]\,5,85\,]$
(C) $]\,0,5\,]$
(D) $]\,1,21\,]$

32. La pendiente de la recta de la siguiente gráfica es



(A) $\frac{b}{a}$

(B) $\frac{a}{b}$

(C) $\frac{-a}{b}$

(D) $\frac{-b}{a}$

33. Si la gráfica de una función f es la recta que contiene a los puntos de coordenadas $(-1, 2)$ y $(3, 1)$ entonces $f^{-1}(x)$ es igual a

(A) $4x-1$
(B) $-4x+7$
(C) $-4x-1$
(D) $\frac{13-x}{4}$

34. La curva definida por $y = 2x^2 + 5x - 3$ interseca al eje x en

(A) $(0,-3)$

(B) $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y en $(-3,0)$

(C) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y en $(0,-3)$

(D) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ y en $(3,0)$

35. Si f es la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = -4x^2 + 4x + 3$ entonces $f(x) \geq 0$ en

(A) $\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

(B) $\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$

(C) $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

(D) $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

36. Un granjero dispone de 2 400 metros de alambre para cerca, este alambre lo tiene destinado para delimitar un terreno rectangular contiguo a un riachuelo de curso rectilíneo. No se requiere colocar una cerca en la orilla que limita con el río. Si se expresa la función área del terreno en términos de x, donde x es la medida del lado paralelo al margen del río entonces el dominio de la función es el siguiente conjunto

(A) $]0,+\infty[$

(B) $]0,2400[$

(C) $]0,1200[$

(D) $]0,600[$

37. Si $f(x) = 3 - 2(x-1)^2$, definida con dominio IR entonces el ámbito de f es

(A) [3 , +∞ [

(B)] -∞ , 3]

(C) [1 , +∞ [

(D)] -∞ , 1]

38. Sea $f(x)=ax^2+bx+c$, f: $IR \rightarrow IR$.. Si el mínimo de la función es $f(-2)=3$, considere las siguientes afirmaciones:

I. La gráfica de f interseca al eje x en dos puntos.
II. $f(-4)=f(0)$
III. Si $x \in [-4,0]$ entonces $f(x) \geq 3$

De las afirmaciones anteriores, son verdaderas
(A) solamente la I y la II
(B) solamente la I y la III
(C) solamente la II y la III
(D) la I, la II y la III

39. Si el ámbito de la función $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=kx^2+\left(k^2-3\right)x+c$ es $\left[\, f(1),+\infty\right[$ entonces el valor de "k" es

a. 1
b. 3
c. -3
d. $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

40. Si la gráfica de $f(x)=(a+2)x^2+3x+6$ es una parábola cóncava hacia arriba entonces se puede garantizar que "a" debe pertenecer al siguiente conjunto

(A) $\left]-\infty,2\right[$
(B) $\left]-\infty,-2\right[$
(C) $\left]2,+\infty\right[$
(D) $\left]-2,+\infty\right[$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROYECTO MATEM - 2008

Sábado 21 de junio de 2008
Primer Examen Parcial
Tiempo Probable: 3 horas

NOMBRE DEL ALUMNO: ____

CÓDIGO:______________

COLEGIO: ____

PREGUNTA DE DESARROLLO NÚMERO 1

Considere $f(x)=\begin{cases} -x+5 & \text{si} \quad 2 \leq x < 4 \\ \\ -x^2+2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 2 \end{cases}$ y con base en ella complete los ítems siguientes:

(Valor 4 puntos)

a) El dominio máximo de la función corresponde a ________________.

b) La intersección con el eje x corresponde al punto _______________.

c) La intersección con el eje y corresponde al punto _______________.

d) El ámbito de la función corresponde a ______________________.

PREGUNTA DE DESARROLLO NÚMERO 2

Considere las funciones $f(x)=\dfrac{2}{3x-2}$ y $g(x)=\dfrac{3x}{3x-2}$ definidas en su máximo dominio y con base en ellas complete los ítems siguientes:

(Valor 4 puntos)

a) $(f-g)(x)=$ ____________________.

b) El dominio de $f-g$ corresponde a ____________.

c) $(\dfrac{f}{g})(x)=$ ____________________.

d) El dominio de $\dfrac{f}{g}$ corresponde a ____________.

NOMBRE DEL ALUMNO: ____

CÓDIGO:_______________

COLEGIO: ____

PREGUNTA DE DESARROLLO NÚMERO 3

Considere las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ y $g(x)=\sqrt{x-2}$ definidas en su máximo dominio, con base en ellas complete los ítems siguientes:

(Valor 2 puntos)

a) $(f \circ g)(x) =$ ____________________.

b) El dominio de $f \circ g$ corresponde a ___________________.

PREGUNTA DE DESARROLLO NÚMERO 4

Encuentre dos números tales que su suma sea 20 y que la suma de sus cuadrados sea la menor posible. 5 puntos.